Pitagoras-en zenbaki-hirukoteak bilatzeko bide bat

A. Zatarain

Abstract

This work deals about the Pythagoras Theorem. We know that in the right-angled triangle we have $a^2=b^2+c^2$, being a the hypotenuse and b and c the sides of the right-angled triangle. This work presents a method to get the hypotenuse and the sides integer numbers (that is to say a, b and c). At the end the author compares it with the Courant & Robinson's method.

Laburpena

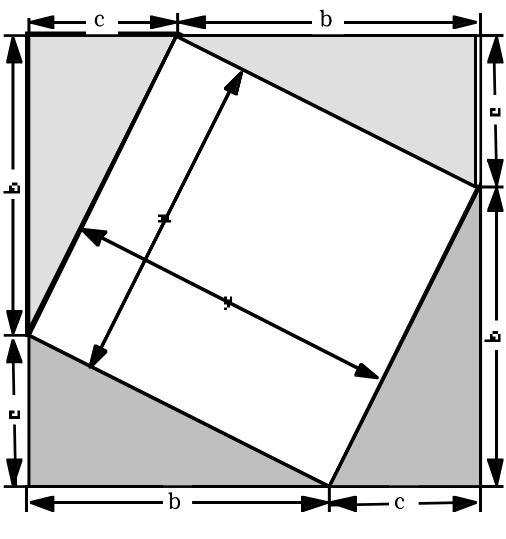
Artikulu honek Pitagorasen teoremaz dihardu. Bakakigu triangelu zuzenean $a^2=b^2+c^2$ gertatzen dela, a hipotenusa eta b zein c katetuak direlarik. Ondoan garatzen den metodoan, Pitagorasen teorema betetzen duten hipotenusa eta katetuen balio osoak (a, b eta c zenbaki-hirukoteak, alegia) ateratzeko bidea erakusten da, eta azkenean Courant & Robinson-en bidearekin erkatzen du egileak.

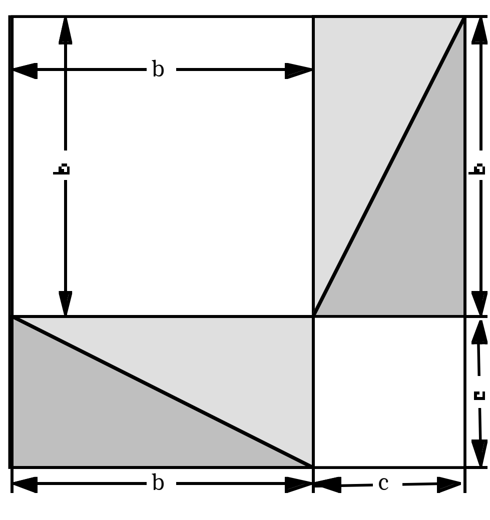
Pitagorasen teoremak dioena, honako hau da: *triangelu zuzenean, alde luzeenaren karratua beste bi aldeen karratuen batura adinakoa da*:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Teorema hau erraz frogatzeko, bi irudien bidez begietatik sartzea aski dugu.

Marra ditzagun b + c aldea duten bi karratu. Bakoitzaren barruan lau triangelu zuzen marratuko ditugu. Bi irudietan b + c karratu





handiari lau triangelu kentzen dizkiogu. Batean $(b+c)^2 - 4 (1/2 \, bc) = a^2$ gertatzen da. Bestean berriz, $(b+c)^2 - 4 (1/2 \, bc) = b^2 + c^2$. Horrela argi eta garbi ikusten dugu

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Hauxe da Pitagorasen teorema. a triangeluaren alde handiari esango diogu, c txikienari eta b bitartekoari.

Horrela, $a = b + g$ izango da; bitartekoa eta gehigarri bat. $c = b - k$ egingo dugu; alde txikiena bitartekoari k luzeera kendurik.

Orain Pitagorasen teorema beste era honetara idatziko dugu:

$$(b+g)^2 = b^2 + (b-k)^2 \qquad (1)$$

Hor ageri diren karratuak eginik:

$$b^2 + 2gb + g^2 = b^2 + b^2 - 2bk + k^2 \qquad (2)$$

ateratzen zaigu. Guztia alde batera eramanik, honako hau ateratzen zaigu:

$$b^2 - 2b\,(g+k) + k^2 - g^2 = 0 \qquad (3)$$

Eta hemendik

$$b = g + k \pm \sqrt{(g+k)^2 - 1\,(k^2-g^2)} =$$
$$= (g+k) \pm \sqrt{(g+k)^2 - (k-g)\,(k+g)} =$$
$$= g + k \pm \sqrt{g^2 + 2gk + k^2 - (k^2-g^2)} =$$
$$= g + k \pm \sqrt{g^2 + 2gk + g^2} =$$
$$= (g+k) \pm \sqrt{2g\,(g+k)} \qquad (4)$$

Orain

$$2g\,(g+k) = (2N)^2 = 4\,N^2$$

egiten badugu,

$$g + k = \frac{2\,N^2}{8} \qquad (5)$$

aterako zaigu. Hemen edozein N zenbakirekin $g = 1$ eta $g = 2$ har genezazke, baina $g = N$ egingo bagenu,

$$g + k = \frac{2\,N^2}{N} = 2\,N$$

gertatuko litzaiguke:

$$N + K = 2\,N$$

Beraz, $k = N$

Horrela $g = k$ gertatzen da, eta 3, 4, 5 triangelua eta onen anizkoitzak aterako genituzke. Triangelu bakunak, zatiezinak, atera nahi ditugunez, g zenbakia $2\,N^2$ zenbakiaren zatigarria eta $g < N$ aukeratu behar dugu.

(4) berdintasuna honela idatz genezake:

$$b = g + k) \pm \sqrt{2g\,(g+k)} = \frac{2\,N^2}{g} \pm 2\,N; \qquad (6)$$

Hortik

$$a = b + g \qquad (7)$$

eta

$$c = b - k = b - (g+k-g) = b - \left[\frac{2\,N^2}{g} - g\right] =$$

$$= \frac{2\,N^2}{g} \pm 2N - \left[\frac{2\,N^2}{g} - g\right] = \pm\, 2\,N + g \qquad (8)$$

Hiru zenbakiak bilatzeko, hiru berdintasun baditugu:

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{2\,N^2}{g} + 2\,N \\ a &= b + g \\ c &= 2\,N + g \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Berdintasun horietan g handiegia hartzen badugu, b txikiagotu egiten den artean, c handiagotu egiten da, baina hirukote berberak ateratzen dira. Adibidez, egin dezagun $N = 6$; horrekin

$$b = \frac{2 \times 6^2}{g} + 2 \times 6 = \frac{72}{g} + 12$$

$$c = 12 + g$$

Horrela:

$g = 1$ denean;	$c = 13$,	$b = 84$	eta $a = 85$
$g = 2$ denean;	$c = 14$,	$b = 48$	eta $a = 50$
$g = 3$ denean;	$c = 15$,	$b = 36$	eta $a = 39$
$g = 4$ denean;	$c = 16$,	$b = 30$	eta $a = 34$
$g = 6$ denean;	$c = 18$,	$b = 24$	eta $a = 30$
$g = 8$ denean;	$c = 20$,	$b = 21$	eta $a = 29$
$g = 9$ denean;	$c = 21$,	$b = 20$	eta $a = 29$
$g = 12$ denean;	$c = 24$,	$b = 18$	eta $a = 30$
$g = 18$ denean;	$c = 30$,	$b = 16$	eta $a = 34$
$g = 24$ denean;	$c = 36$,	$b = 15$	eta $a = 39$
$g = 36$ denean;	$c = 48$,	$b = 14$	eta $a = 50$
$g = 72$ denean;	$c = 84$,	$b = 13$	eta $a = 85$

Horrelako alferrikako lanak ez egiteko, $c \leq b$ egingo dugu. Horretarako

$$c = 2\,N + g \text{ eta } b = \frac{2\,N^2}{g} + 2\,N$$

direla gogoratu behar da; baldintza

$$2\,N + g \leq \frac{2\,N^2}{g} + 2\,N \quad \text{edo} \quad g \leq \frac{2\,N^2}{g}$$

eta hortik

$$g^2 \leq 2\,N^2$$

ateratzen dugu, eta azkenik baldintza

$$g \leq N\sqrt{2} \qquad (10)$$

dugu. Ikusi dugun adibidean, $N = 6$ genuen. Beraz,

$$g \leq 6\sqrt{2} = 8{,}48$$

eta halaxe galerazten da $g = 9$, lehenengo aldiz $c > b$ egin diguna.

Orain hirukote bila hasteko prest gara.

N = 1

$$b = \frac{2 \times 1^2}{g} + 2 \times 1;\ g = 1{,}2;\ g < \sqrt{2} < 1{,}4$$

$g = 1$

$b = 2 + 2 = 4;$
$a = b + g = 4 + 1 = 5$
$c = 2\,N + g = 2 + 1 = 3$

Beraz, $c = 3$, $b = 4$ eta $a = 5$

N = 2

$$b = \frac{2 \times 2^2}{g} + 2 \times 2 = 8/g + 4;$$

$g < 2\sqrt{2} = 2{,}8;\ g = 1, 2;\ 2/1;\ 2/2 = 1/1$

$g = 1$

$b = 8 + 4 = 12;$
$a = 12 + 1 = 13;$
$c = 4 + 1 = 5$

Beraz, $c = 5$, $b = 12$ eta $a = 13$

$g = 2$

$b = 4 + 4 = 8;\ a = 8 + 2 = 10;\ c = 4 + 2 = 6;$

$2/2 = 1/1$

Beraz, $N = 1$ eginiz ateratzen dena biaz biderkaturik. Hurrengoetan horrelakorik gerta ez dakigun, $2/2 = 1/1$ dela ikusirik, hirukote bakuna lehendik aterata zegoela bagenekien.

N = 3

$$b = \frac{2 \times 3^2}{g} + 2 \times 3 = 18/g + 6;$$

$g = 1, 2, 3, 6, 9, 18$

$g < 3\sqrt{2} = 4{,}2$; beraz $g = 1, 2, 3;$

$3/1;\ 3/2;\ 3/3 = 1/1$; beraz $g = 1, 2$

$g = 1$

$b = 18 + 6 = 24;$
$a = 24 + 1 = 25;$
$c = 6 + 1 = 7$

Beraz, $c = 7$, $b = 24$ eta $a = 25$

$g = 2$

$b = 9 + 6 = 15;$
$a = 15 + 2 = 17;$
$c = 6 + 2 = 8$

Beraz, $c = 8$, $b = 15$ eta $a = 14$

N = 4

$$b = \frac{2 \text{ x } 4^2}{g} + 2 \text{ x } 4 = 32/g + 8;$$

$g = 1, 2, 4, 8, 16, 32$

$g < 4\sqrt{2} = 5{,}6$; beraz $g = 1, 2, 4;$

$4/2 = 2/1; 4/4 = 1/1$

$g = 1$

$b = 32 + 8 = 40;$
$a = 40 + 1 = 41;$
$c = 8 + 1 = 9$

Beraz, $c = 9$, $b = 40$ eta $a = 41$

N = 5

$$b = \frac{2 \text{ x } 5^2}{g} + 2 \text{ x } 5 = 40/g + 10;$$

$g = 1, 2, 5$

$g < 5\sqrt{2} = 7{,}07$; beraz $g = 1, 2, 5;$

$5/1; 5/2; 5/5 = 1/1$

$g = 1$

$b = 50 + 10 = 60;$
$a = 60 + 1 = 61;$
$c = 10 + 1 = 11$

Beraz, $c = 11$, $b = 60$ eta $a = 61$

$g = 2$

$b = 25 + 10 = 35;$
$a = 35 + 2 = 37;$
$c = 10 + 2 = 12$

Beraz, $c = 12$, $b = 35$ eta $a = 37$

N = 6

$g = 1, 2, 3, 4, 6, 8$; beraz $g = 1, 8$
$g = 1$; $c = 13$, $b = 84$ eta $a = 85$
$g = 8$; $c = 20$, $b = 21$ eta $a = 29$

N = 7

$g = 1, 2, 7$; beraz $g = 1, 2$
$g = 1$; $c = 15$, $b = 112$ eta $a = 113$
$g = 2$; $c = 16$, $b = 63$ eta $a = 65$

N = 8

$g = 1, 2, 4, 8$; beraz $g = 1$
$g = 1$; $c = 17$, $b = 144$ eta $a = 145$

N = 9

$g = 1, 2, 3, 6, 9$; beraz $g = 1, 2$
$g = 1$; $c = 19$, $b = 180$ eta $a = 181$
$g = 2$; $c = 20$, $b = 99$ eta $a = 101$

N = 10

$g = 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10$; beraz $g = 1, 8$
$g = 1$; $c = 21$, $b = 220$ eta $a = 221$
$g = 8$; $c = 28$, $b = 45$ eta $a = 53$

N = 11

$g = 1, 2, 11$; beraz $g = 1, 2$
$g = 1$; $c = 23$, $b = 264$ eta $a = 265$
$g = 2$; $c = 24$, $b = 143$ eta $a = 145$

N = 12

$g = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\ 12, 16$; $12/16$ (ezina)
beraz $g = 1, 9$
$g = 1$; $c = 25$, $b = 312$ eta $a = 313$
$g = 9$; $c = 33$, $b = 56$ eta $a = 65$

N = 13

$g = 1, 2, 13$; beraz $g = 1, 2$
$g = 1$; $c = 27$, $b = 364$ eta $a = 365$

g = 2; c = 28, b = 195 eta a = 197

N = 14

g = 1, 2, 4, 7, 8, 14; 14/8 (ezina)
beraz g = 1, 8
g = 1; c = 29, b = 420 eta a = 421
g = 8; c = 36, b = 67 eta a = 85

N = 15

g = 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18; 15/18 (ezina)
beraz g = 1, 2, 9
g = 1; c = 31, b = 480 eta a = 481
g = 2; c = 32, b = 255 eta a = 257
g = 9; c = 39, b = 80 eta a = 89

N = 16

g = 1, 2, 4, 8, 16; beraz g = 1
g = 1; c = 33, b = 544 eta a = 545

N = 17

g = 1, 2, 17; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 35, b = 612 eta a = 613
g = 2; c = 36, b = 323 eta a = 325

N = 18

g = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24;
18/8 = 9/4 (ezina)
beraz g = 1, 8
g = 1; c = 37, b = 684 eta a = 685
g = 8; c = 44, b = 117 eta a = 125

N = 19

g = 1, 2, 19; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 39, b = 760 eta a = 761
g = 2; c = 40, b = 399 eta a = 401

N = 20

g = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25;
20/25 (ezina)
beraz g = 1, 25?
g = 1; c = 41, b = 840 eta a = 841
g = 25; c = 65, b = 72 eta a = 97

N = 21

g = 1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21;
21/9 eta 21/18 (ezinak)
beraz g = 1, 2, 9?, 18?
g = 1; c = 43, b = 924 eta a = 925
g = 2; c = 44, b = 483 eta a = 485
g = 9; c = 51, b = 140 eta a = 149
g = 18; c = 60, b = 91 eta a = 109

N = 22

g = 1, 2, 4, 8, 11, 22; 22/8 (ezina)
beraz g = 1, 8
g = 1; c = 45, b = 1.012 eta a = 1.013
g = 8; c = 52, b = 165 eta a = 173

N = 23

g = 1, 2, 23; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 47, b = 1.104 eta a = 1.105
g = 2; c = 48, b = 575 eta a = 577

N = 24

g = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32;
24/9 eta 24/18 (ezinak)
beraz g = 1, 9, 32
g = 1; c = 49, b = 1.200 eta a = 1.201
g = 9; c = 57, b = 176 eta a = 185
g = 32; c = 80, b = 84 eta a = 116

N = 25

g = 1, 2, 5, 10, 25; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 51, b = 1.300 eta a = 1.301
g = 2; c = 52, b = 675 eta a = 677

N = 26

g = 1, 2, 4, 8, 13, 26; 26/8 (ezina)
beraz g = 1, 8
g = 1; c = 53, b = 1.404 eta a = 1.405
g = 8; c = 60, b = 221 eta a = 229

N = 27

g = 1, 2, 6, 9, 18, 27; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 55, b = 1.512 eta a = 1.513
g = 2; c = 56, b = 783 eta a = 785

N = 28

g = 1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 32;
28/32 (ezina)
beraz g = 1, 32?
g = 1; c = 57, b = 1.624 eta a = 1.625
g = 32; c = 88, b = 105 eta a = 137

N = 29

g = 1, 2, 29; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 59, b = 1.740 eta a = 1.741
g = 2; c = 60, b = 899 eta a = 901

N = 30

g = 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 18, 20, 24, 25, 40;
30/8, 30/9 eta 30/25 (ezinak)
beraz g = 1, 8?, 9?, 25?
g = 1; c = 61, b = 1.860 eta a = 1.861
g = 8; c = 68, b = 285 eta a = 293
g = 9; c = 69, b = 260 eta a = 269
g = 25; c = 85, b = 132 eta a = 157

N = 31

g = 1, 2, 31; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 63, b = 1.984 eta a = 1.985
g = 2; c = 64, b = 1.023 eta a = 1.025

N = 32

g = 1, 2, 4, 8, 16, 32; beraz g = 1
g = 1; c = 65, b = 2.112 eta a = 2.113

N = 33

g = 1, 2, 3, 6, 9, 11, 18, 22, 33;
33/9 eta 33/18 (ezinak)
beraz g = 1, 2, 9?, 18?
g = 1; c = 67, b = 2.244 eta a = 2.245
g = 2; c = 68, b = 1.155 eta a = 1.157
g = 9; c = 75, b = 308 eta a = 317
g = 18; c = 84, b = 187 eta a = 205

N = 34

g = 1, 2, 4, 8, 17, 37; 34/8 (ezina)
beraz g = 1, 8?
g = 1; c = 69, b = 2.380 eta a = 2.381
g = 8; c = 76, b = 357 eta a = 365

N = 35

g = 1, 2, 5, 7, 10, 14, 25, 35, 49;
35/25 eta 35/49 (ezinak)
beraz g = 1, 2, 25?, 49?
g = 1; c = 71, b = 2.520 eta a = 2.521
g = 2; c = 72, b = 1.295 eta a = 1.297
g = 25; c = 95, b = 168 eta a = 193
g = 49; c = 119, b = 120 eta a = 169

N = 36

g = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 27, 32, 36, 48; 36/32 (ezina)
beraz g = 1, 32?
g = 1; c = 73, b = 2.664 eta a = 2.665
g = 32; c = 104, b = 153 eta a = 185

N = 37

g = 1, 2, 37; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 75, b = 2.812 eta a = 2.813
g = 2; c = 76, b = 1.443 eta a = 1.445

N = 38

g = 1, 2, 4, 8, 19, 38; 38/4 eta 38/8 (ezinak)
beraz g = 1, 8?
g = 1; c = 77, b = 2.964 eta a = 2.965
g = 8; c = 64, b = 437 eta a = 445

N = 39

g = 1, 2, 3, 6, 9, 13, 18, 26, 39;
39/9 eta 39/18 (ezinak)
beraz g = 1, 2, 9?, 18?
g = 1; c = 79, b = 3.120 eta a = 3.121
g = 2; c = 80, b = 1.599 eta a = 1.601

g = 9; c = 87, b = 416 eta a = 425
g = 18; c = 96, b = 247 eta a = 265

N = 40

g = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 25, 32, 40, 50;
40/25 (ezina) beraz g = 1, 25?
g = 1; c = 81, b = 3.280 eta a = 3.281
g = 25; c = 105, b = 208 eta a = 233

N = 41

g = 1, 2, 41; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 83, b = 3.444 eta a = 3.445
g = 2; c = 84, b = 1.763 eta a = 1.765

N = 42

g = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 49, 56;
42/8, 42/9, 42/18, 42/36, 42/49 eta 42/56 (ezinak)
beraz g = 1, 8?, 9?, 49?, 56?
g = 1; c = 85, b = 3.612 eta a = 3.613
g = 8; c = 92, b = 525 eta a = 533
g = 9; c = 93, b = 476 eta a = 485
g = 49; c = 133, b = 156 eta a = 205
g = 56; c = 140, b = 147 eta a = 203

N = 43

g = 1, 2, 43; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 87, b = 3.784 eta a = 3.785
g = 2; c = 88, b = 1.935 eta a = 1.937

N = 44

g = 1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 32, 44;
44/16 eta 44/32 (ezinak)
beraz g = 1, 32?
g = 1; c = 89, b = 3.960 eta a = 3.961
g = 32; c = 120, b = 209 eta a = 241

N = 45

g = 1, 2, 3, 6, 9, 10, 15, 18, 25, 27, 30, 45, 50, 54;
45/25, 45/27 eta 45/50 (ezinak)
beraz g = 1, 25?, 27?, 50?
g = 1; c = 91, b = 4.140 eta a = 4.141
g = 25; c = 115, b = 252 eta a = 277
g = 27; c = 117, b = 240 eta a = 267
g = 50; c = 140, b = 171 eta a = 221

N = 46

g = 1, 2, 4, 8, 23, 46; 46/8 (ezina)
beraz g = 1, 8?
g = 1; c = 93, b = 4.324 eta a = 4.325
g = 8; c = 100, b = 621 eta a = 629

N = 47

g = 1, 2, 47; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 95, b = 4.512 eta a = 4.513
g = 2; c = 96, b = 2.303 eta a = 2.305

N = 48

g = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 64; 48/9 (ezina); beraz g = 1, 9?
g = 1; c = 97, b = 4.704 eta a = 4.705
g = 9; c = 105, b = 608 eta a = 617

N = 49

g = 1, 2, 7, 14, 49; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 99, b = 4.900 eta a = 4.901
g = 2; c = 100, b = 2.499 eta a = 2.501

N = 50

g = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50;
50/8 (ezina); beraz g = 1, 8?
g = 1; c = 101, b = 5.100 eta a = 5.101
g = 8; c = 108, b = 725 eta a = 733

N = 51

g = 1, 2, 3, 6, 9, 17, 18, 34, 51;
51/9 eta 51/18 (ezinak)
beraz g = 1, 2, 9?, 18?
g = 1; c = 103, b = 5.304 eta a = 5.305
g = 2; c = 104, b = 2.703 eta a = 2.705
g = 9; c = 111, b = 680 eta a = 689
g = 18; c = 120, b = 391 eta a = 409

N = 52

g = 1, 2, 4, 8, 13, 16, 26, 32, 52;
52/32 (ezina); beraz g = 1, 32?
g = 1; c = 105, b = 5.512 eta a = 5.513
g = 32; c = 136, b = 273 eta a = 305

N = 53

g = 1, 2, 53; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 107, b = 5.724 eta a = 5.725
g = 2; c = 108, b = 2.915 eta a = 2.917

N = 54

g = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72; 54/8 (ezina); beraz g = 1, 8?
g = 1; c = 109, b = 5.940 eta a = 5.941
g = 8; c = 116, b = 837 eta a = 845

N = 55

g = 1, 2, 5, 10, 11, 22, 25, 50, 55;
55/25 eta 55/50 (ezinak);
beraz g = 1, 2, 25?, 50?
g = 1; c = 111, b = 6.160 eta a = 6.161
g = 2; c = 112, b = 3.135 eta a = 3.137
g = 25; c = 135, b = 352 eta a = 377
g = 50; c = 160, b = 231 eta a = 281

N = 56

g = 1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 32, 49, 56, 64;
56/49 eta 56/64 (ezinak);
beraz g = 1, 49?, 64?
g = 1; c = 113, b = 6.384 eta a = 6.385
g = 49; c = 161, b = 240 eta a = 289
g = 64; c = 176, b = 210 eta a = 274

N = 57

g = 1, 2, 3, 6, 9, 18, 19, 38, 57;
57/9 eta 57/18 (ezinak)
beraz g = 1, 2, 9?, 18?
g = 1; c = 115, b = 6.612 eta a = 6.613
g = 2; c = 116, b = 3.353 eta a = 3.365
g = 9; c = 123, b = 836 eta a = 845
g = 18; c = 132, b = 475 eta a = 493

N = 58

g = 1, 2, 4, 8, 29, 58; 58/8 (ezina)
beraz g = 1, 8?
g = 1; c = 117, b = 6.844 eta a = 6.845
g = 8; c = 124, b = 957 eta a = 965

N = 59

g = 1, 2, 59; beraz g = 1, 2
g = 1; c = 119, b = 7.080 eta a = 7.081
g = 2; c = 120, b = 3.599 eta a = 3.601

N = 60

g = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 60, 72, 75;
60/9, 60/25, 60/32, 60/36, 60/45, 60/50, 60/72 eta 60/75 (ezinak)
beraz g = 1, 9?, 24?, 25?, 32?, 36?, 45?, 50?, 72, 75?
g = 1; c = 121, b = 7.320 eta a = 7.321
g = 9; c = 129, b = 920 eta a = 929
g = 24; c = 144, b = 420 eta a = 444
g = 25; c = 145, b = 408 eta a = 433
g = 32; c = 152, b = 345 eta a = 377
g = 36; c = 156, b = 320 eta a = 356
g = 45; c = 165, b = 280 eta a = 325
g = 50; c = 170, b = 264 eta a = 314
g = 72; c = 192, b = 220 eta a = 292
g = 75; c = 195, b = 216 eta a = 219

Noizbait gelditu behar dugu eta hementxe geldituko gara.

Guztira 145 hirukote ediren ditugu. Orain alde txikien neurriak zerrenda ezarriko ditugu, eta parentesi artean alde-neurri hori sortu duen edo duten N zenbakiak erantsiko dizkiegu.

3 (1), 5 (2), 7 (3), 8 (3), 9 (4), 11 (5), 12 (5), 13 (6), 15 (7), 16 (7), 17 (8), 19 (9), 20 (6, 9), 21 (10), 23 (11), 24 (11), 25 (12), 27 (13), 28 (10, 13), 29 (14), 31 (15), 32 (15), 33 (12, 16), 35 (17), 36 (14, 17), 37 (18), 39 (15, 19), 40 (19), 41 (20), 43 (21), 44 (18, 21), 45 (22), 47 (23), 48 (15, 23), 49 (24), 51 (21, 25), 52 (22, 25), 53 (26), 55 (27), 56 (27), 57

(24, 28), 59 (29), 60 (21, 26, 29), 61 (30), 63 (31), 64 (31), 65 (20, 32), 67 (33), 68 (30, 33), 69 (30, 34), 71 (35), 72 (35), 73 (36), 75 (33), 76 (34), 77 (38), 79 (39), 80 (39), 81 (40), 83 (41), 84 (33, 38, 41), 85 (30, 42), 87 (39, 43), 88 (28, 43), 89 (44), 91 (45), 92 (45), 93 (42, 46), 95 (35, 47), 96 (39, 45), 97 (48), 99 (49), 100 (46, 49), 101 (50), 103 (51), 104 (36, 51), 105 (40, 48, 52), 107 (53), 108 (50, 53), 109 (54), 111 (51, 55), 112 (55), 113 (56), 115 (45, 57), 116 (54, 57), 117 (45, 58), 119 (35, 59), 120 (44, 51, 59), 121 (60), 123 (57), 124 (58), 129 (60), 132 (57), 133 (42), 135 (55), 136 (52), 140 (42, 45), 144 (60), 145 (60), 152 (60), 156 (60), 160 (54), 161 (56), 165 (60), 170 (60), 176 (56), 192 (60), 195 (60).

Erreskada horretan gauza nabarmen bat bada: alde txikien neurriak ondoz ondoko hiruren ondoren laugarrenak huts egin ohi duela. Esate baterako, N = 9 eta N = 10 eginik 19, 20, 21 ateratzen zaizkigu, baina 22 ez da agertzen. Zergatik?

$$N = g; \; b = \frac{2 \times g^2}{g} + 2 \times g;$$

hemen g = 1 eta g = 2 egin daitezke;

$$b = \frac{162}{1} + 18 = 180 \text{ eta}$$

$$b = \frac{162}{2} + 18 = 99$$

ateratzen dira;

$$c = 18 + 1 = 19 \text{ eta } c = 18 + 2 = 20.$$

Baina N = 10 egindakoan,

$$b = \frac{2 \times 10^2}{g} + 2 \times 20 = \frac{200}{g} + 20$$

ateratzen dira eta g = 1, 2, 4, 8 egin daitezke, eta 5, 10 eta 25 ere bai. N/g = 10/g delarik, N/g = 10/1, 10/2, 10/4, 10/5, 10/10, 10/25; baina10/2 = 5/1; 10/4 = 5/2; 10/5 = 2/1. Eta 5/1 harturik 11, 60, 61 hirukotea atera zitzaigun; 5/2 harturik 12, 35, 37 hirukotea; 2/1 harturik 5, 12, 13 hirukotea.

Hori gogoratu gabe eragiketak egingo bagenitu, honako hauek aterako genituzke:

N = 10

g = 1; b = 220, a = 221 eta c = 21	(a)
g = 2; b = 120, a = 122 eta c = 22	(b)
g = 4; b = 70, a = 74 eta c = 24	(c)
g = 5; b = 60, a = 65 eta c = 25	(d)
g = 8; b = 45, a = 53 eta c = 28	(e)
g = 10; b = 40, a = 50 eta c = 30	(f)
g = 25; b = 28, a = 53 eta c = 45	(g)

Horrela ateratako hirukoteak sinplifikatzen baditugu, honako aterako zaizkigu:

(b) 22, 120, 122 biak zatiturik 11, 60, 61
(N = 5, g = 1 eginik atera zena)

(c) 24, 70, 74 biak zatiturik 12, 35, 37
(N = 5, g = 2 eginik atera zena)

(d) 25, 60, 65 bostaz zatiturik 5, 12, 13
(N = 25, g = 1 eginik atera zena)

(e) 28, 45, 53 bakuna
(N = 10, g = 8 eginik atera zena)

(f) 40, 30, 50 hamarraz zatiturik 4, 3, 5
a > b (N = 1, g = 1 eginik atera zena)

(g) 45, 28, 53 bakuna
c > b (N = 10, g = 8 eginik atera zena)

Ikusten denez, jokatu dugun bezala jokaturik alferrikako lana ugari eragotsi dugu.

ERANSKINA

Courant & Robinson-en "What is Mathematics" liburuak aldeak bilatzeko beste bide bat eman zuen. ("Was ist Mathematik" alemanezko itzulpenaren 33. orrialdean Springer Verlag, 3. Aufrage, 1957):

Bi zenbaki, U eta V, aukeratu behar dira, V > U, bata bakoitia eta bestea bikoitia, eta zatitzaile berdinik ez dutenak. Horrela

$$a = V^2 + U^2;\ b = 2\ UV;\ c = V^2 - U^2$$

Adibidez

V = 9, U = 4

$a = 9^2 + 4^2 = 81 + 16 = 97;$
$b = 2 \times 9 \times 4 = 72;$
$c = 9^2 - 4^2 = 81 - 16 = 65$ 65, 72, 97

Hirukote hau N = 20 eta g = 25 eginik atera zitzaigun.

Egin dezagun c = 135 ateratzea nahi dugula. Zenbaki hau bakoitia delarik, $c = V^2 - C^2$ egin beharko dugu:

$135 = V^2 - U^2 = (V+U)(V-U) = 135 \times 1;$
$V + U = 135;$
$V - U = 1;$
$(V+U) + (V-U) = 2\ V = 135 + 1 = 136;\ V = 68;$
$(V+U) - (V-U) = 2\ U = 135 - 1 = 134;\ V = 67.$

Orain hirukoitza:

$a = 682 + 672 = 4.624 + 4.489 = 9.113;$
$b = 2 \times 68 \times 67 = 9.112;$
$c = V^2 - C^2 = 68^2 - 67^2 = 135$

Gure bideaz honela egingo dugu:

$135 = 2\ N + g = 134 + 1;$
$N = 134/2 = 67;$

$$b = \frac{2 \times 67^2}{g} + 2 \times 67 = \frac{8.978}{g} + 134 =$$

$$= 8.978 + 134 = 9.112;\ a = b + g = 9.113$$

g = 1 egin beharrean, beste edozein bakoiti har genezake, baina N gero eta txikiagoa aterako zaigu, eta b ere bai, eta hirukoteak ez dira bakunak izango; multzoko zatitzailedunak baizik.

g = 3 eginez, 2 N = c - g = 135 - 3 = 132;

N = 66

$$b = \frac{2 \times 66^2}{3} + 2 \times 66 = \frac{8.712}{3} + 132 =$$

$$= 2.904 + 132 = 3.036;$$

$a = 3.036 + 3 = 3.039$
$c = 2 \times 66 + 3 = 132 + 3 = 135$

Beraz 135, 3.036, 3.039; hau ez da bakuna. 3az zati daiteke eta 45, 1.012, 1.013 hirukotea, N = 22 eginik atera genuena da.

Beste adibidea, c = 136 egin nahi badugu, Courant & Robbins-en eragiketaz hau aterako zaigu:

$$136 = 2\ UV = 2 \times 4 \times 17$$

Beraz U = 4, V = 17;

$a = 17^2 + 4^2 = 289 + 16 = 305$
$b = 17^2 - 4^2 = 273$

Gure bideaz, 2 N = 136 - 2 = 134;

N = 67

$$b = \frac{2 \times 67^2}{3} + 2 \times 67 = 4.489 + 134 = 4.623$$

a = 4.623 + 2 = 4.625

Beraz, 136, 4.628, 4.625 hirukotea. Bestea, 136, 273, 289 hirukotea alegia, N = 52 eginik, atera zitzaigun.

Litezkeen hirukote guztiak erreskadan ateratzeko, gure bidea askoz errazagoa da. Izan ere, bestearekin U, V bikote guztiak moldatzen ari behar da eta gurearekin N handiagotuz aritzea aski baita.