Einstein-Maxwell-en ekuazioen soluzio zehatz berria dipolo magnetiko masibo estatikoaren kasurako

J.R. Etxebarria & **V.S. Manko**

Fisika Teorikoa,
Euskal Herriko Unibertsitatea,
644 P.K., 48080 Bilbao.

Abstract
An exact asymptotically flat solution of the Einstein-Maxwell equations able to describe the exterior gravitational field of a massive static source possessing a magnetic dipole moment is presented. It contains two independent arbitrary parameters associated with the total mass and magnetic moment of the source, and reduces in absence of magnetic field to the Schwarzschild metric.

Laburpena
Lan honetan Einstein-Maxwell-en ekuazioen soluzio zehatz eta asintotikoki launa aurkeztu da, zeina momentu dipolar magnetikoa duen iturri masibo estatikoak sorturiko kanpo-eremu grabitazionala adierazteko egokia den. Iturriaren masa osoarekin eta momentu magnetikoarekin atxikirik doazen eta edonolakoak izan daitezkeen bi parametro independente dauzka bere barnean, eremu magnetikorik ez dagoenean Schwarzschild-en metrika bihurtzen delarik.

Aldi berean muga modura Schwarzschild-en hutseko soluzio estatikoa izanik, eta momentu dipolar magnetikoaz hornituriko masa estatikoak sorturiko kanpo-eremu grabitazionala adierazteko balio duten Einstein-Maxwell-en ekuazioen bi-parametrodun soluzio asintotikoki launen lehenengo adibideak, erreferentziako [1, 2] lanetan lorturik daude, horretarako soluzioa sortzeko teknika ezagunak erabili zirelarik. Oraingo komunikazio honen helburua, berriro ere beste soluzio magnetostatiko zehatz berri bat aurkeztea da, zeina, [1, 2] metriken kasuan bezala, eremu magnetikorik ez dagoenean Schwarzschild-en espazio-denbora esferikoki simetrikora laburbiltzen den, eta gainera forma polinomiko sinplea duen.

Lehenago Bonnor-en soluzioen [3] eta edonolako huts estatikoren Weyl-en eremuren gainezarmen ez-lineala adierazten duen formula orokorretik [1] guk geuk erakarri eta aurkezturiko soluzio magnetostatikoa, ondoko ε eta ϕ potentzialen bidez defini daiteke, zeintzuk (x,y) koordenatu prolatu-esferoidaletan honako eran idatz daitezkeen:

$$\varepsilon = \frac{A_-}{A_+}, \qquad \phi \equiv iA'_3 = \frac{2i\alpha C}{A_+} \tag{1a}$$

$$A_\pm \equiv (x\pm1)\,[(x-y)\,(x+y)^3 + \alpha^2\,(1\pm y)\,(1\pm y)^3]^2$$

$$-\ \alpha^2\,(x\pm1)\,(1\pm y)^2\,[(x+y)^3 - (x-y)\,(x\pm1)^2]^2 \tag{1b}$$

$$C \equiv (x-y)^2(x+y)^4\,(2xy+y^2+1)$$

$$+\ \alpha^2\,(1-y^2)^2\,[(x+y)^4 - (x^2-1)\,(x-y)^2] \tag{1c}$$

non A'_3 delakoa potentzial magnetikoa den, eta α delakoa edonolako konstante erreala.

Ernst-en ekuazioak [4] betetzen dituen (1) soluzioa honakoa da,

$$(\mathrm{Re}\,\varepsilon + \phi\phi^*)\,[(x^2-1)\,\varepsilon_{xx} + (1-y^2)\,\varepsilon_{yy} +$$

$$+\ 2(x\varepsilon_x - y\varepsilon_y)] = (x_2-1)\,(\varepsilon_x + 2\,\phi^*\phi_x)\,\varepsilon_x +$$

$$+\ (1-y^2)(\varepsilon_y + 2\phi^*\phi_y)\,\varepsilon_y \tag{2a}$$

$$(\mathrm{Re}\,\varepsilon + \phi\phi^*)\,[(x^2-1)\,\phi_{xx} + (1-y^2)\,\phi_{yy} +$$

$$+\ 2(x\phi_x - y\phi_y)] = (x_2-1)\,(\varepsilon_x + 2\,\phi^*\phi_x)\,\phi_x +$$

$$+\ (1-y^2)(\varepsilon_y + 2\phi^*\phi_y)\,\phi_y \tag{2b}$$

eta ondoko lerro-elementu estatiko asimetrikoan ageri diren f eta γ koefizienteak definitzen ditu, hots,

$$ds^2 = m^2 f^{-1}\Big[e^{2\gamma}\,(x^2-y^2)\left(\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2}\right) +$$

$$+\ (x^2-1)\,(1-y^2)\,d\phi^2\Big] - fdt^2, \tag{3}$$

lerro-elementu hori dagozkion eremu-ekuazioetatik lor daitekeelarik [5], bertan ageri diren φ eta t horiek angelu azimutala eta denbora direlarik, hurrenez hurren. Kalkuluak eginez, honela adieraz daitezke f eta γ:

$$f = \frac{(x^2-1)\,D^2}{A_+^2} \tag{4a}$$

$$e^{2\gamma} = (x^2-1)\,D^4\,(x-y)^{-9}\,(x+y)^{-25}, \tag{4b}$$

$$\mathrm{D} \equiv (x-y)^2\,(x+y)^6 + \alpha^4\,(1-y^2)^4$$

$$+\ \alpha^2\,(1-y^2)\Big\{(x+y^2)^6 + (x-y)^2\big[(x^2-1)^2 - 2\,(x+y)^4\big]\Big\} \tag{4c}$$

Erraz ikus daitekeenez, α parametro magnetikoa zero bihurturik, (4) formulak Schwarzschild-en metrikari dagozkion f eta γ adierazpen ezagun bihurtzen dira, hots,

$$f = \frac{x-1}{x+1}, \qquad e^{2\gamma} = \frac{x^2-1}{x^2-y^2} \tag{5}$$

Lorturiko metrika asintotikoki launa da, zeren, $x \to \infty$ egitean $f \to 1$, $\gamma \to 1$ baitira. Are gehiago, potentzial magnetikoari dagokionez, $A'_3 \to x^{-2}$ dela ikus daiteke, hau da, dipolo magnetikoari dagokion eremua deskribatzen du.

Gure soluzioko m eta α parametroen esangura fisikoa (m parametroa x eta y koordenatuetan dago barneraturik) zein den, argiago ikus daiteke beraren momentu multipolar erlatibistak kontsideraturik, zeintzuen arteko lehenengo laurak, Hoenselaers-Perjés-en prozedura [6] erabiliz, honakoak direla aurkitu den:

$$M_0 = m,\ M_1 = M_2 = 0,\ M_3 = m^2\,\alpha^2, \tag{6a}$$

$$B_0 = 0,\ B_1 = m\alpha,\ B_2 = -2m^2\alpha,\ B_3\ 2m^3\alpha \tag{6b}$$

(bertako M_n eta B_n direlakoek masaren eta momentu magnetikoaren banaketak deskribatzen dituzte, hurrenez hurren). (6) adierazpenetatik ikus daitekeenez, m delakoa iturriaren masa osoa da eta α delakoa masa-unitateko momentu dipolar magnetikoa.

(4) metrikak $x = 1$ hipergainazalak definituriko horizonte-gertaera dauka, zeinak bi puntu singular soilik dauzkan ($y = \pm\ 1$ polo-

ak). Soluzioaren bestelako singularitateak $A_+ = 0$ ekuazio algebraikoaren erro errealak dira.

Bibliografia

(1) Ts. I. Gutsunaev and V. S. Manko, Phys. Lett. **A132**, 85 (1988).
(2) V. S. Manko, Gen. Relativ. Grav. **22**, 799 (1990).
(3) W. B. Bonnor, Z. Phys. **190**, 144 (1966).
(4) F. J. Ernst, Phys. Rev. **168**, 1415 (1968).
(5) D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt and M. A. H. MacCallum, *Exact solutions of Einstein's field equations* (DAV, Berlin, 1980).
(6) C. Hoenselaers and Z. Perjés, Class. Quantum Grav. **7**, 1819 (1990).