# AZPIMULTZO LAUSOAK

P. Larrañaga Mugika eta J.L. Jimenez Jimenez

Informatika-Fakultatea. E.H.U. Donostia

*SUMMARY:*

In this little article we try to generalize the idea ofsubset as it has been used in the classical Mathematics to the kind of subsets called Fuzzy Subsets.

We expose too, some of the properties which generalize the behaviour of the classical subsets and some properties which are verified by classical subsets, but not by fuzzy subsets.

## SARRERA

Azpimultzo laúsoen teoria, Matematika klasikoaren zehaztasunaren eta munduaren errealitatearen zehazgabetasunaren artean kokatzen dela kontsidera daiteke.

Lan konplexutarako makinen diseinuan gaur egungo gizakien ezintasunaren arrazoi garrantzitsuenetariko bat, konputagailuen eta gizakien burmuin artean dagoen desberdintasuna da. Hark logika boolearra erabiltzen duen bitartean, gizakiena askoz ere konplexuagoa da.

Zein da matematikari batentzat "fuzzy" edo lauzo hitzaren esanahia? Matematikariak kontzeptu honekin, elementu baten multzo batekiko barnekotasuna guztiz garbi ez dagoela adieraziko du. Egoera hau kontrakoa da Matematika klasikoarekin konparatuz. Honetan elementu batek multzo batekiko bi posibilitate bakarrik dauzka: edo multzo horren partaide da, edo ez da. Bi egoera hauen mamia logika boolearrean dago. Logika hau, mende honen haseran Post (1921), Lukasiewicw (1937) eta Moisil-ek (1940) egindako lanei esker generalizatu zen, logika bitar hori logika n-tar bihurtuz. Geroago L.A. Zadeh eta A. Kaufmann izan dira teoria hau gehien landu dutenak.

## HAȘTAPENAK

Matematika klasikoan erabiltzen den azpimultzoen kontzeptua azpimultzo lausoen kasu berezi bat besterik ez dela ikusiko dugu; hau da, Matematika lausoaren bidez ezagutzen ditugun kontzeptu gehienak orokortu daitezkeela alegia.

Bedi E edozein multzo, eta A, E multzoaren azpimultzo bat. Beraz $A \subset E$ daukagu. Edozein E-ren x elementu bat A-rena dela adierazteko $x \varepsilon A$ ikurra erabiltzen dugu. Kontzeptu bera adierazteko kontsidera dezagun beste era bat: azpimultzo bakoitzarentzat funtzio karakteristiko bat definituko dugu.

Bedi $\mu_A(x)$, A-rena.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{baldin } x \varepsilon A \\ 0 & \text{baldin } x \varepsilon A \end{cases}$$

Oraindik Matematika klasikoarekin jarraituz, ikus dezagun zer erlazio dauden, bi azpimultzoen arteko ebaketari eta bilketari dagokien funtzio karakteristikoa azpimultzoen funtzio karakteristikoekin konparatuz.

Bira A eta B, E multzoaren bi edozein azpimultzo. Dakigunez

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{baldin } x \varepsilon A \wedge B \\ 0 & \text{baldin } x \varepsilon A \wedge B \end{cases}$$

Beraz $\mu_{A \wedge B}(x) = \mu_A(x) \,.\, \mu_B(x)$ betetzen da, non . eragiketari biderkaketa boolear deitzen bait zaio eta ondorengo taulan agertzen diren propietateak betetzen bait ditu:

| (.) | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Taulan konproba daitekeenez

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \mathrm{MIN}\,\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Era berean eta bilketari dagokionez, zera daukagu:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{baldin } x \varepsilon A \cup B \\ 0 & \text{baldin } x \varepsilon A \cup B \end{cases}$$

Ondorengo taularen bitartez $\dot{+}$ batuketa boolearra definitzen badugu, zera beteko da:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \dot{+} \mu_B(x)$$

Kasu honetan $\mu_{A \cup B}(x) = \mathrm{MAX}\,\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ berdinketa beteko da.

$\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ eta $\underset{\sim}{C}$ hiru edozein azpimultzo lauso.

**a) Partekotasuna**

| $(\dot{+})$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

$$\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B} \quad \forall x \varepsilon E \quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) < \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

Adibidez $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ $M = [0,1]$

$$\underset{\sim}{A} = \left\{ \left(\frac{x_1}{0.4}\right), \left(\frac{x_2}{0.2}\right), \left(\frac{x_3}{0}\right), \left(\frac{x_4}{1}\right) \right\}$$

$$\underset{\sim}{B} = \left\{ \left(\frac{x_1}{0.3}\right), \left(\frac{x_2}{0}\right), \left(\frac{x_3}{0}\right), \left(\frac{x_4}{0}\right) \right\}$$

direlarik $B \subset A$ betetzen da,

$$0.3 < 0.4,\ 0 < 0.2,\ 0 < 0, \text{ eta } 0 < 1$$

inekuazioak betetzen direlako.

**b) Berdintasuna**

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} \quad \forall x \varepsilon E \quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

**c) Osagarritasuna**

$\underset{\sim}{A}$-ren azpimultzo osagarria, $\bar{\underset{\sim}{A}}$ ikurraz adierazten da eta bere funtzio karakteristikoaren bitartez honela definitzen:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_{A}(x)$$

Azpimultzo arruntekin gertatzen den bezala, erraz froga daiteke ondorengo berdinketa $(\bar{\bar{A}}) = A$.

**d) Ebaketa, Bilketa**

Bira $A$ eta $B$ bi edozein azpimultzo lauso. Beraien arteko ebaketa (bilketa) $A \wedge B$ ($A \cup B$) izango da, eta bere definizioa funtzio karakteristikoaren bidez hauxe da:

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \mathrm{MIN}\,\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$(\mu_{A \cup B}(x) = \mathrm{MAX}\,\{\mu_A(x), \mu_B(x)\})$$

A-ren azpimultzo osagarriari, $\bar{A}$, dagokion funtzio karakteristikoari dagokionez, eta erraz froga daitekenez, zera daukagu:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Beraz orain arte Matematika klasikoaren azpimultzoez hitz egin dugu. Hauetan funtzio karakteristikoak har zitzakeen balio bakarrak 0 eta 1 ziren. Hau generalizatzen badugu eta funtzio karakteristikoak har ditzakeen balioak [0,1] tarte itxiaren edozein azpitartean egonez gero, azpimultzo lauso baten aurrean egongo ginateke. Funtzio karakteristikoak har ditzakeen balioaz osaturiko multzoari, "Membership set" deitzen zaio, eta M ikurraz adierazten da. $M = \{0,1\}$ denean azpimultzo arrunta izango dugu.

Esandakoa adibide batez ikus dezagun. Kontsidera dezagun $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ bost pertsonaz osaturiko erreferentzi multzoa. Biz $A$ pertsona handien ondorengo azpimultzo lausoa:

$$A = \left\{\left(\frac{x_1}{0.2}\right), \left(\frac{x_2}{0}\right), \left(\frac{x_3}{0.3}\right), \left(\frac{x_4}{1}\right), \left(\frac{x_5}{0.8}\right)\right\}$$

Honek bigarren pertsona txikia dela, esan nahi du, laugarrena handia eta beste hiruren egoera ez dago oso garbi. Bostgarren pertsonaren egoera A azpimultzo lausoarekiko honela interpretatuko genuke: pertsona hori *nahiko* handia da, baina ezin daiteke guztiz handi kontsideratu; beraz A azpimultzoan dago bere barnekotasun-gradua 0.8 delarik. Era berean interpretatuko genituzke lehenengo eta hirugarren pertsonen egoerak.

Askotan goiko egoera adierazteko, barnekotasun ikurra erabiliz

$$x_1 \underset{0.2}{\in} A, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_5 \underset{0.8}{\in} A$$

jarriko dugu, $\underset{\sim}{\in}$ ($\in$) eta azpimultzo arruntekin erabiltzen ditugun $\in$ ($\notin$) ikurrak baliokideak direlarik.

Azpimultzo lausoen definizioa, Matematikoki adierazteko eta Zadeh-en notazioa erabiliz, era honetan jarriko dugu:

$$A = \left\{\left(\frac{x}{\mu_A(x)}\right)\right\} \quad \forall x \in E, \ \mu_A(x): E \rightarrow M$$

## ZENBAIT DEFINIZIO

Emango ditugun definizioetan E erreferentzi multzoa izango da, M *membership set*, hau da, bere elementuek barnekotasun-gradua neurtuko dute.

**e) Batura zuzena**

$\underset{\sim}{A}$ eta $\underset{\sim}{B}$-ren arteko batura zuzena era honetara adierazten da: $A \oplus B$, definizioa $\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B} = (\underset{\sim}{A} \wedge \bar{\underset{\sim}{B}}) \cup (\bar{\underset{\sim}{A}} \wedge \underset{\sim}{B})$ delarik.

**f) Diferentzia**

$\underset{\sim}{A}$ eta $\underset{\sim}{B}$-ren arteko diferentzia era honetara definitzen da: $\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \wedge \bar{\underset{\sim}{B}}$ Matematika klasikoan gertatzen den bezala:

$$\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} \neq \underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{A}$$

Gauzak finkatzeko ikus ditzagun adibide batekin definitutako eragiketak.

$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0,1]$

$$\underset{\sim}{A} = \left\{ \left(\frac{x_1}{0.2}\right), \left(\frac{x_2}{0.7}\right), \left(\frac{x_3}{1}\right), \left(\frac{x_4}{0}\right), \left(\frac{x_5}{0.5}\right) \right\}$$

$$\underset{\sim}{B} = \left\{ \left(\frac{x_1}{0.5}\right), \left(\frac{x_2}{0.3}\right), \left(\frac{x_3}{1}\right), \left(\frac{x_4}{0.1}\right), \left(\frac{x_5}{0.5}\right) \right\}$$ direlarik,

hau daukagu:

Era berean eta Venn-Euler diagramen antzeko adierazpen grafikoak erabiliz, azpimultzo lausoentzat zera daukagu:

$$\underset{\sim}{A} \wedge \underset{\sim}{B} = \left\{ \left(\frac{x_1}{0.2}\right), \left(\frac{x_2}{0.3}\right), \left(\frac{x_3}{1}\right), \left(\frac{x_4}{0}\right), \left(\frac{x_5}{0.5}\right) \right\}$$

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \left\{ \left(\frac{x_1}{0.5}\right), \left(\frac{x_2}{0.7}\right), \left(\frac{x_3}{1}\right), \left(\frac{x_4}{0.1}\right), \left(\frac{x_5}{0.5}\right) \right\}$$

$$\bar{\underset{\sim}{A}} = \left\{ \left(\frac{x_1}{0.8}\right), \left(\frac{x_2}{0.3}\right), \left(\frac{x_3}{0}\right), \left(\frac{x_4}{1}\right), \left(\frac{x_5}{0.5}\right) \right\}$$

$$\bar{\underset{\sim}{B}} = \left\{ \left(\frac{x_1}{0.5}\right), \left(\frac{x_2}{0.7}\right), \left(\frac{x_3}{0}\right), \left(\frac{x_4}{0.9}\right), \left(\frac{x_5}{0.5}\right) \right\}$$

$$\underset{\sim}{A} \wedge \bar{\underset{\sim}{B}} = \left\{ \left(\frac{x_1}{0.2}\right), \left(\frac{x_2}{0.7}\right), \left(\frac{x_3}{0}\right), \left(\frac{x_4}{0}\right), \left(\frac{x_5}{0.5}\right) \right\}$$

$$\bar{\underset{\sim}{A}} \wedge \underset{\sim}{B} = \left\{ \left(\frac{x_1}{0.5}\right), \left(\frac{x_2}{0.3}\right), \left(\frac{x_3}{0}\right), \left(\frac{x_4}{0.1}\right), \left(\frac{x_5}{0.5}\right) \right\}$$

$$\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B} = \left\{ \left(\frac{x_1}{0.5}\right), \left(\frac{x_2}{0.7}\right), \left(\frac{x_3}{0}\right), \left(\frac{x_4}{0.1}\right), \left(\frac{x_5}{0.5}\right) \right\}$$

$$\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \left\{ \left(\frac{x_1}{0.5}\right), \left(\frac{x_2}{0.7}\right), \left(\frac{x_3}{0}\right), \left(\frac{x_4}{0}\right), \left(\frac{x_5}{0.5}\right) \right\}$$

1. irudia: Azpimultzo lausoen adierazpen grafikoak

## ZENBAIT PROPIETATE

Matematika klasikoan betetzen ziren zenbait propietate, azpimultzo lausoetan ez dira betetzen. Hala nola: $\underset{\sim}{A} \cup \bar{\underset{\sim}{A}} \neq E$ eta $\underset{\sim}{A} \wedge \bar{\underset{\sim}{A}} \neq \emptyset$, ondorengo adibideekin froga daitekeenez:

$$E = \{x_1, x_2\}$$

$$\underset{\sim}{A} = \left\{ \left( \frac{x_1}{0.6} \right), \left( \frac{x_2}{0.4} \right) \right\}$$

$$\underset{\sim}{A} \wedge \bar{\underset{\sim}{A}} = \left\{ \left( \frac{x_1}{0.4} \right), \left( \frac{x_2}{0.4} \right) \right\} \text{ eta}$$

$$\underset{\sim}{A} \cup \bar{\underset{\sim}{A}} = \left\{ \left( \frac{x_1}{0.6} \right), \left( \frac{x_2}{0.6} \right) \right\}$$

Ikus dezagun betetzen den zenbait propietate:

a) Azpimultzo lausoen artean, ebaketa banatzailea da bilketarekiko. Hau da, $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ eta $\underset{\sim}{C}$ hiru edozein E-ren azpimultzo lauso direlarik, ondorengo berdinketa betetzen da:

$$\underset{\sim}{A} \wedge (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \wedge \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A} \wedge \underset{\sim}{C})$$

Hau frogatzeko ikus dezagun ezkerreko eta eskuineko azpimultzo lausoei dagozkien funtzio karakteristikoak berdinak direla:

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \wedge (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C})}(x) =$$
$$= \mathrm{MIN}\,\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}}(x)\} =$$
$$= \mathrm{MIN}\,\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mathrm{MAX}\,\{\mu_{\underset{\sim}{B}}(x), \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)\} =$$
$$= \mathrm{MAX}\,[\mathrm{MIN}\,\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\},$$
$$\mathrm{MIN}\,\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)\}] =$$
$$= \mathrm{MAX}\,\{\mu_{\underset{\sim}{A} \wedge \underset{\sim}{B}}(x), \mu_{\underset{\sim}{A} \wedge \underset{\sim}{C}}(x)\} =$$
$$= \mu_{(\underset{\sim}{A} \wedge \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A} \wedge \underset{\sim}{C})}(x)$$

b) De Morgan-en legeak betetzen dira:

1) $\overline{\underset{\sim}{A} \wedge \underset{\sim}{B}} = \bar{\underset{\sim}{A}} \cup \bar{\underset{\sim}{B}}$

lehen bezala funtzio karakteristikoen bitartez dugu.

$$\mu_{\overline{\underset{\sim}{A} \wedge \underset{\sim}{B}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A} \wedge \underset{\sim}{B}}(x) =$$
$$= 1 - \mathrm{MIN}\,\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\} =$$
$$= \mathrm{MAX}\,\{1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x), 1 - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\} =$$
$$= \mathrm{MAX}\,\{\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x), \mu_{\bar{\underset{\sim}{B}}}(x)\} =$$
$$= \mu_{\bar{\underset{\sim}{A}} \cup \bar{\underset{\sim}{B}}}(x)$$

2) Antzeko frogapena egin ondoren, erraz lor daiteke:

$$\overline{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}} = \bar{\underset{\sim}{A}} \wedge \bar{\underset{\sim}{B}}$$

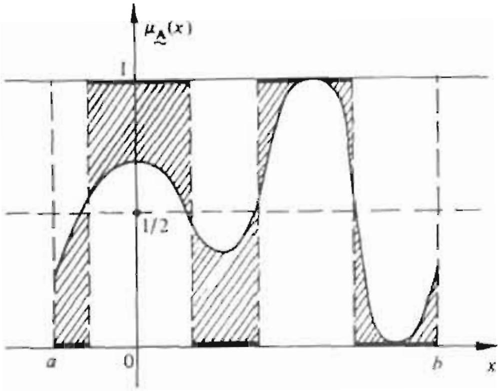
## AZPIMULTZO LAUSO BATEKIKO AZPIMULTZO ARRUNTIK HURBILENA

$\underset{\sim}{A}$ edozein azpimultzo lauso baldin bada, eta $\underset{\approx}{A}$ bidez $\underset{\sim}{A}$-rekin konparatuz hurbilen (distantzia bat definitu ondoren) dagoen azpimultzo arrunta $\underset{\approx}{A}$ ikurraz adierazten badugu, $\mu_{\underset{\approx}{A}}(x)$ funtzio karakteristikoa ondorengo hau izango da:

$$\mu_{\underset{\approx}{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{baldin } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0.5 \\ 0 & \text{baldin } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) < 0.5 \\ 0 \text{ edo } 1 \text{ (aleatorioki)} & \\ \text{baldin } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0.5 & \end{cases}$$

Ikus dezagun ondorengo irudian azpimultzo lauso baten eta hurbilen dagoen azpimultzo arruntaren arteko erlazioa.

Bi azpimultzo lausoen arteko ebaketari (bilketari) dagokion azpimultzo




2. irudia: Azpimultzo lausoa / Azpimultzo arrunta

arruntik hurbilena, azpimultzo lauso bakoitzari dagokion azpimultzorik hurbilenen arteko ebaketa (bilketa) bezala lor daiteke.

Hau da:

a) $\underline{\underset{\sim}{A}\wedge\underset{\sim}{B}} = \underline{\underset{\sim}{A}}\wedge\underline{\underset{\sim}{B}}$ eta

b) $\underline{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}} = \underline{\underset{\sim}{A}}\cup\underline{\underset{\sim}{B}}$

Frogapenak antzekoak direnez egin dezagun lehenengo propietateari dagokiona.

Ikus dezagun

$$x \in \underline{\underset{\sim}{A}\wedge\underset{\sim}{B}} \Leftrightarrow x \in \underline{\underset{\sim}{A}}\wedge\underline{\underset{\sim}{B}}$$

$$x \in \underline{\underset{\sim}{A}\wedge\underset{\sim}{B}} \Leftrightarrow \mu_{\underline{\underset{\sim}{A}\wedge\underset{\sim}{B}}}(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\wedge\underset{\sim}{B}}(x) > 0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0.5 \text{ eta } \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) > 0.5 \Leftrightarrow^{*}$$

$$\mu_{\underline{\underset{\sim}{A}}}(x) = 1 \text{ eta } \mu_{\underline{\underset{\sim}{B}}}(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$x \in \underline{\underset{\sim}{A}} \text{ eta } x \in \underline{\underset{\sim}{B}} \Leftrightarrow x \in \underline{\underset{\sim}{A}}\wedge\underline{\underset{\sim}{B}}.$$

(*)Ez dugu $\mu_{A\wedge B}(x) = 0.5$ kasua kontsideratzen.

**BIBLIOGRAFIA**

KAUFMANN, A., "Introduction a la Théorie des sous-ensembles flous", *Tome I*: Eléments théoriques de base; Tome II: Langages, sémantique, et logique; *Tome III*: Classification et reconnaissance des formes, automates, machines de Turing, problèmes multi-critéres, systèmes; Masson, Paris 1973-1975.

KAUFMANN,A., COOLS, M., DUBOIS, T.; "Exercices avec Solutions sur la Theorie des Sous-ensembles Flous"; Masson, Paris, 1975.