ZENBAKI PERFEKTUEN BARNE EGITURA

ANDONI DEL CAMPO

Dakigunez (ikus U.Z.E.I.ren Matematika/1 Hiztegia), beren zatitzaileen batura eta zenbakia bera berdinak dituztenak, zenbaki perfektuak dira.

Esate baterako, 28aren zatitzaileak 1, 2, 4, 7 eta 14 dira. Eta $1+2+4+7+$ $+14=28$.

Beraz 28a zenbaki perfektua da.

28a ere zatitzailea dela onartzen badugu, $2x28=1+2+4+7+14+28$.

Bila ditzagun orain 496 zenbakiaren zatitzaileak.

Horretarako deskonposa dezagun faktore lehenetan.

496	2
248	2
124	2
62	2
31	31
1	

Beraz $496=2^4x31$

496aren zatitzaile guztiak lortzeko, honela egin dezakegu:

$1 \quad 2 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4$

$1 \quad 31$

$1x1=1$ $1x31=31$ $2x1=2$ $2x31=62$ $4x1=4$ $4x31=124$ $8x1=8$ $8x31=246$ $16x1=16$ $16x31=496$

Hots, lehen lerroaren bat eta bigarrenaren beste bat, eta konbinaketa posible guztiak eginez.

Zatitzaile guztien batura beraz hau da: $(1+2+2^2+2^3+2^4)x(1+31)=992= =2x\,496$.

Beraz 496a zenbaki perfektua da.

Orokorki, N zenbakia faktore lehenetan deskonposatuz $N=A^a x...x\,B^b x...xD^d$ bere zatitzaileen batura $(1+A+A^2+...+A^a)x...x(1+B+B^2+...+B^b)x\,...x\,(1+ +D+...+D^d)$ da.

Orain arte aurkitu diren zenbaki perfektu guztiak bikoitiak izan dira (6,28 eta 496 esate baterako), baina ez da oraindik frogatu zenbaki perfektuak bikoitiak izan behar dutenik.

Azter ditzagun hasteko 6,28 eta 496 zenbakien deskonposaketak.

$6=2x3$ $\qquad (1+2)x(1+3)=12=2x6$

$28=2^2x7$ $\qquad (1+2+2^2)x(1+7)=56=2x28$

$496=2^4x31$ $\qquad (1+2+2^2+2^3+2^4)x(1+31)=992= =2x496$

Kontura gaitezen lehen parentesien baturak, bigarren parentesien zenbaki lehenak direnaz.

Hots $1+2=3$; $1+2+2^2=7$ eta $1+2+2^2+2^3+2^4=31$.

Alderantziz $(1+2+2^2+...+2^a)=L$ zenbaki lehena baldin bada $(1+2+2^2+ +...+2^a)x(1+L)=2xN$; N zenbakia perfektua izango al da?.

Froga dezagun

$1+2+2^2+...+2^a$ progresio geometrikoa da, beraz

$$1+2+2^2+...+2^a=\frac{2^a x2-1}{2-1}=2^{2+1}-1$$

eta beraz $L=1+2+...+2^a$ izanik, $L+1=2^{a+1}$ eta

$2xN=(1+2+...+2^a)x(1+L)=(2^{a+1}-1)x(2^{2+1}-1)x2x2^a$ eta ondorioz

$$N=\frac{2xN}{2}=2^a x(2^{a+1}-1)=2^a xL$$

Hau da beraz N zenbakiaren deskonposaketa faktore lehenetan; 2 eta L lehenak bait dira.

Eta Nren zatitzaileen batura $(1+2+\ldots+2^a)x(1+L)=2N$.

Beraz N perfektua da.

Badaukagu beraz zenbaki perfektu bikoiti batzuk aurkitzeko metodo bat. (Ez dakit berria den ala ez).

Horretarako hauek aurkitu behar ditugu 2aren berreketen baturak zenbaki lehenak izanik; $1+2+2^2+\ldots+2^n=L$; L lehena izanik.

Has gaitezen

$n=1$ $\quad 1+2+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1=2^2-1=3$

3 lehena da; beraz $(1+2)x(1+3)=3x4=12=2x6$ eta 6 perfektua da, dakigunez.

$n=2$ $\quad 1+2+\ldots+2^n=2^3-1=7$

7 lehena da, beraz $(1+2+2^2)x(1+7)=7x8=56=2x28$ eta 28a ere perfektua da

$n=3$ $\quad 1+2+\ldots+2^n=2^4-1=16-1=15$; 15 ez da lehena

$n=4$ $\quad 1+2+2^2+\ldots+2^n=2^5-1=32-1=31$ zenbaki lehena

beraz $(1+2+2^2+2^3+2^4)x(1+31)=31x32=992=2x496$

496a ere zenbaki perfektua beraz.

$n=5$ $\quad 1+2+2^2+\ldots+2^n=2^6-1=63=3$ ez da lehena

$n=6$ $\quad 1+2+\ldots+2^n=2^7-1=127$, lehena zorionez

Beraz $127x(127+1)=16.526=2x8.128$ eta 8.128a beste zenbaki perfektua da.

$n=12$ $\quad 1+2+\ldots+2^n=2^{13}-1=8.191$; lehena hau ere

Beraz $\dfrac{8.191x(8.191+1)}{2}=33.550.336$ perfektua

$n=16$ $\quad 1+2+\ldots+2^n=131.071$ lehena

eta ondorioz $\dfrac{131.071x(131.071+1)}{2}=8.589.869.056$; perfektua hau ere.

Eman diezaiogun gainbegirada bat orain zenbaki perfektu bakoitien egiturari. N bakoitia bada, bere zatitzaile guztiak ere bakoitiak dira.

Bere deskonposaketa honelakoa da: $N=A^a x\ldots xB^b x\ldots xD^d$ $(a<\ \ldots<B<$

... < D izanik) perfektua izateko hurrengo berdinketa bete behar da.

$$2xN = (1 + A + A^2 + ... + A^a)x...x(1 + B + B^2 + ... + B^b)x...x(1 + D + D^2 + ... + D^d)$$

Berdinketaren ezker aldean 2 faktore lehena, behin bakarrik agertzen da, N bakoitia delako. Beraz hori bera gertatu behar du berdinketaren eskuinaldean. Parentesis guztiek, bat ezik, bakoitiak izan behar dute; batek bakarrik izan behar du bikoitia eta 2 faktoreak behin bakarrik agertu behar du parentesi horren deskonposaketan.

Azter ditzagun orain parentesi bakoitien egiturak.

F lehena baldin bada $(1 + F + F^2 + ... + F^f)$ bakoitia izateko $f = 2xn$-k bikoitia izan behar du. Bestela, $f = 2xn + 1$ bakoitia bada, honela jar genezake parentesia

$(1 + F + F^2 + ... + F^f) = (1 + F) + (F^2 + F^3) + ... + (F^{f-1} + F^f) = (1 + F)x(1 + F^2 + F^4 + F^6 + ...F^{f-1}$. Baina $F + 1 = 2$ eta ondorioz $(1 + F + ... + F^f) = 2$ ere bikoitia izango litzateke.

Beraz a,...,b,... eta d berretzaileek 2, bikoitiak izan behar dute, batek ezik.

Izan bedi $a = 2,..., d = 2$ eta $b = 2$ berretzaile bakoiti bakarra.

Orduan $b = 1$ izan behar du.

Bestela, $b = 2xp + 1$; $p \neq 0$ bada, honela jar genezake

$$(1 + B + b^2 + ... + B^b) = (1 + B + B^2 + ... + B^{2xp+1}) = (1 + B) + (B^2 + B^3) + ... +$$
$$+ (B^{2xp} + B^{2xp+1}) = (1 + B)x(1 + B^2 + B^4 + ... + B^{2xp}) =$$
$$= (1 + B)x\left((1 + B^2) + (1 + B^4) + ... + (B^{2xp-1} + B^{2xp})\right)$$

eta $1 + B$, $1 + B^2$,... eta $B^{2xp-1} + B^{2xp}$ parentesi guztiak bikoitiak dira eta 2 faktorea, behin baino gehiago agertuko litzateke $(1 + B + B^2 + ... + B^b)$ parentesian. Beraz zenbaki bakoitien deskonposaketak honelakoa izan beharko luke:

$$2xN = (1 + A + A^2 + ... + A^{2xn})x...x(1 + B)x...x(1 + D + D^2 + ... + D^{2xm})$$

Gainera B faktore lehena ez daiteke izan Nren faktore lehen txikiena.

$1 + B$ deskonposatzen badugu, 2xK eta $1 + B$ deskonposketan B baino faktore txikiagoak agertuko lirateke eta faktore guzti hauek Nren faktoreak izan beharko dute derrigorrez.

Horregatik beti egon behar du beste faktore batek gutxienez $(A < B)$ Nren deskonposaketan.

Guzti honekin zera lortu dugu:

N zenbaki bakoiti bat, perfektua baldin bada, bere deskonposaketa honelakoa izango da:

$$2xN = (1 + A + ... + A^{2xn})x...x(1 + B)x...x(1 + D + ... + D^{2xm})$$

$N = A^{2xn}x...xBx...xD^{2xm}$ izanik, hots:

$N = (A^n x...xD^m)^2 xB = P^2 xB$ P^2 karratu perfektua izanik.

Saia gaitezen orain zenbaki bikoitiekin egin dugun bezala, zenbaki bakoiti perfektu batzuk aurkitzen.

Has gaitezen sinpleenak arakatzen:

$N = A^{2n}xB$ egitura daukatenak ($A < B$ esan dugun bezala).

N perfektua izan dadin, honek gertatu behar du:

$$2xN = 2xA^{2xn}xB = (1 + A + A^2 + ... + A^{2xn})x(1 + B) = \frac{A^{2xn}xA - 1}{A - 1}x(1 + B)$$

Baina $(1 + A + A^2 + ... + A^{2xn}) \neq A$. Beraz $(1 + B)$k Aren multiplo izan behar du eta A^{2xn}ren multiplo gainera.

Beste alde batetik $1 + B \neq B$; beraz B faktoreak $(1 + A + ... + A^{2n})$ parentesiaren deskonposaketan agertu behar du.

Ondorioz:

$$(1 + A + A^2 + ... + A^{2n}) = K_1 xB \quad \text{eta} \quad (1 + B) = K_2 xA^{2n}$$

Orduan

$$2N = 2A^{2n}xB = (1 + A + ... + A^{2n})x(1 + B) = K_1 xBxK_2 xA^{2n}$$

Baina dakigunez $(1 + a + ... + A^{2n})$ ez da 2ren multiplo. Beraz $K_1 = 2$ ere 2N 2ren multiplo da. Beraz, K_2k izan behar du 2.

Baina $K_1 xK_2 = 2$; beraz $K_1 = 1$ eta $K_2 = 2$ eta hemendik $(1 + A + A^2 + + ... + A^{2n}) = B$ eta $(1 + B) = 2xA^{2n}$

$$(1 + B) = 1 + (1 + A + ... + A^{2n}) = 1 + \frac{A^{2n+1} - 1}{A - 1} = 2xA^{2n}, \text{beraz}$$

$$A - 1 + A^{2n+1} - 1 = (A - 1)x2xA^{2n}; \quad A + A^{2n+1} - 2 = 2xA^{2n+1} - 2xA^{2n}$$

$$A - 2 = A^{2n+1} - 2xA^{2n} = A^{2n}x(A - 2), \text{ beraz } A = 1 \text{ edo } A = 2$$

Baina gutxienez Ak 3 izan behar du.

Guzti honekin, ez dugu frogatu zenbaki perfektu bakoitirik ez dagoenik, baina behar bada bide honi jarraituz, lortu ahal izango da. ■