GEOMETRIA EZ-EUKLIDEARREN ZIRRIBORRO HISTORIKOA

J. LLOMBART PALET
Matematika Aplikatua Dptua. Zientzi Fakultatea. E.H.U.-U.P.V.

A. BERNALTE MIRALLES
Elektrizitate eta Magnetismoa Dptua. U.N.E.D.

M. ENSUNZA LEKUNBERRI
Fisika Dptua. Zientzi Fakultatea. E.H.U.-U.P.V. P.K. 644 BILBO

ABSTRACT:

An outline of the meaning of the denominated "problem of the postulate of parallels" and the various attempts carried out over the last 2.000 years to solve this problem are given. The search for the correct solution to the problem and how it led to the discovery of non-Euclidean geometry is explained. Finally, reference is made to the application of hyperbolic geometry concerning some theories in the world of physics.

I.- ZUZEN PARALELOEN POSTULATUAREN PROBLEMA

Kristo aurretiko VI. mendcrarte, geometria, eguneroko bizitzan aurkezten ziren arazo batzuren ebazpena baimentzen zuen arau-multzoan zetzan. Arauok, babiloniar eta egyptiarrek garatuak izanik batipat, esperientzia eta behaketetan oinarritzen ziren soilik.

K.a. VI. mendetik III.era doan tartean, greziarrek sartu zuten matematika abstraktua. Hortaz, puntu, lerro, triangelu eta abarreko hitzak, objektu fisikoen bidez gauzaturiko kontzeptu mentalak ziren. Arrazonamendu deduktiboak erabiliz, egite geometrikoen kopuru handia metatzera iristeaz gain, frogapenetarako metodo orokorrak ere garatu zituzten.

K.a 300. urtearen inguruan, *Euklide*-k definizio-, axioma- eta postulatu-multzo bat finkatu zuen, honetatik abiaturik, ordurarte ezagutzen ziren emaitzarik garrantzitsuenak frogatu ahal izan zituelarik. Euklideren meritua axiomak aukeratzean zetzan, zeren hauetaz baliatuz, lehengoko beste zenbait eskolak, hala nola, *Thale*-ren eskola joniarrak, eskola pitagorikoak eta Athenas-eko *Platon*-en eskolak lorturik emaitzak ondorioztatu ahal izan bait ziren. Euklide-ren lana, hamahiru liburutan banaturiko bere obran biltzen da.

Lehen liburuko XXIII. definizioan, ondoko eran izendatzen ditu zuzen paraleloak: *planokideak diren eta nahi den beste luzaturik ere elkar topatzen ez duten zuzenak dira.*

XVII ezaugarria (*Baldin eta zuzen bik beraiekiko zeharkakoa den beste batez barne-angelu alterno berdinak determinatzen badituzte, orduan paraleloak dira*) eta XXVIII.a (*Baldin eta zuzen bik beraiekiko zeharkakoa den beste batez alde bereko barne-angelu betegarriak determinatzen badituzte, orduan paraleloak dira*) direlakoen elkarrekiko ezaugarriak frogatzeko, V. postulatua finkatu zuen:

Baldin eta beste bi ebakitzen dituen zuzen batek, ebakitzailearen alde bereko angeluak, zeintzuen batura bi angelu zuzen baino txikiagoa den, determinatzen baditu, orduan, alde honetara luzaturiko bi haiek elkar topatzen dute.

Mende batzu geroago, 1795.ean, *J. Playfair*-ek, arestikoaren baliokidea den ondoko erara enuntziatu zuen V. postulatua:

Baldin eta P puntu bat t zuzen baten barnekoa ez bada, orduan, P-tik pasatzen den eta t-ren paraleloa den zuzen bakar bat dago.

Euklide-ren obra aintzinatetik aztertzen zuten geometrek, postulatu honek aurrekoak bezain nabaria ez zirudiela behatu zuten (nahiz eta ez zuten zalantzan jarri, berak ziurtasun matematikoa zeukanik). Honek, frogapena saitzera bultzatu zituen, gainontzeko axioma eta geometriaren aintzinako kontzeptuetatik abiatuz. Honela planteaturiko problema hau *zuzen paraleloen postulatuaren problema* izenaz ezagutzen da.

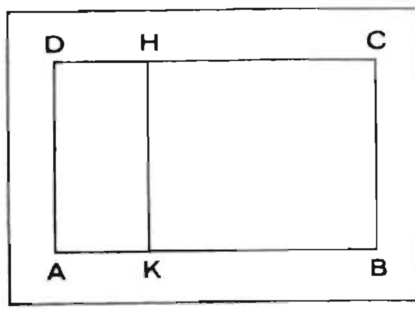
2.- V. POSTULATUAREN FROGATZAILEAK

Erromatar aroan berau frogatzen ahalegindu ziren geometrek, postulatu baliokideak erabiltzearen akatsa jauki zuten eta ondorioz, hauek ez ziren berez, frogatu nahi zuten postulatua bera baino nabariagoak. Honela, bada, *Posidonio*-k (k.a.I. mendea), zuzen paraleloen definizioa hobatuz V. postulatua froga lezakeela uste zuen, hau zela eta, paralelotzat, bi zuzen distantzikide eta planokideak izendatu zuelarik. *Ptolomeo* (K.a. II. mendea) ondoko plangitzari jarraitu zitzaion: Euklide-ren postulatua erabili barik, 29. ezaugarria frogatzen saiatu zen, eta segituan, berau deduzitzen aipaturiko ezaugarritik abiaturik. Beraren arrazonamenduan onartu zuen, ezen baldin eta zuzen-bikote batetarako $\alpha+\beta>2$ angeluzuzen egiaztatuko balitz, beste horrenbeste gertatuko litzatekeela gainerako zuzen-bikoteetarako. *Proclo*-k (410–485) nabaritzat jo zuen ondoko proposizioan oinarrituz frogatu zuen V. postulatua: *Baldin eta zuzen batek paraleloak diren bietariko bat ebakitzen badu, bestea ere ebakitzen du.*

Erromatar Inperioaren eroraldian, arabiarrak gertatu ziren greziarren jakintza matematikoaren gordelariak. Kultura greziarrari zioten begirunea zela eta, berek zeuzkaten eskuskribu greziar askoren itzulpena burutu zuten VII. eta XII. mendeen artean. Dena dela, aztertzen ari garen problemaren ebazpenarekiko ekarpena urria izan zen, beren aurrekoen errore berberak jauki bait zituzten.

Euklide-ren lanaren bertsio arabiarraren bidez, Mendebaldera heldu zen geometria euklidearra, zuzen paraleloen postulatuaren problemak eta geometriaren beraren ezagumenduak aldibereko hedapena izan zutelarik. Posiblea da, problema aztertu zuen lehen irazkintzaile europearra *Levi ben Gerson* (XIV. mendearen hasiera) izatea, problemaren dibulgazioa inprentaren aurkikuntzari ezker (XV. mendea) handiagotu zelarik. Errenaisantza barrena, problemak ikuspegi desegokia izaten segitu zuen. *G. Vitale*-k (1663-1711) bi zuzen paralelo distantzikideak zirela kontsideratu zuen, zuzen batekiko distantzikideak diren puntuen leku geometrikoa zuzen bat dela frogatzeko, okerki aplikaturiko lema bat zerabilelarik.

Vitale-ren meritua ondokoan zetzan: problema, **DC** gaineko **H** puntu baten existentzia frogatzera laburtu zuen, **H** puntutik **AB**-rainoko distantzia, **AD** eta **CB** zuzenkien berdina izanik (1 irudia).

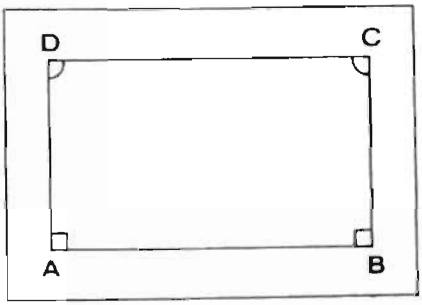


J. Wallis-ek (1616-1703), distantzikidetasunaren kontzeptua baztertuz, V. postulatua frogatu zuen honako hipotesi honetan oinarrituz: *irudi guztietarako, antzekoa den hautazko magnitudeko irudi bat dago*, berau, postulatua bera baino nabariagoa ez delarik; antzeman egin zuen, ordea, paraleloen postulatua, beraren aurretik doazen definizio, axioma eta postulatuekin batera, irudi antzekoak eta ez-berdinak egoteko baldintza beharrezkoa zela.

3.- GEOMETRIA EZ-EUKLIDEARRAREN AITZINDARAIAK

XVIII. mendearen hasieran, *G.S.*

Saccheri (1667-1733) jesuita italiarrak, ikuspegi originala eman zion V. postulatuaren problemari, berau ebazteko saioen historian mugarri bat finkatu zuelarik. *Reductio ad absurdum* delakoaz ziharduen. Euklide-ren lehenengo hogeitazortzi proposizioak egiazkotzat jo zituen, eta aurkako tesi modura V. postulatuaren faltsutasuna hartu zuen kontraesanen batetara iristeko asmoz; beronek, anti-V. postulatua faltsua zela frogatuko luke, eta beraz, V. postulatua egiazkoa. Bere arrazonamenduetan, zuzena infinitua dela onartu zuen inplizituki, eta *Arkimede*-ren postulatuaz eta zuzenaren jarraitasunaren hipotesiaz baliatu zen.



2. irudia.

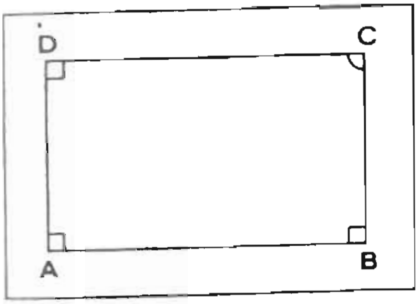
Funtsezko iruditzat oinarriarekiko perpendikularrak eta aurkako alde berdin bi dituen laukia erabiliz, (*Saccheri*-ren laukia, 2. irudia), irudi honen ezaugarriak ondoko lematik abiaturik atera zituen: *Baldin eta* **ABCD** *lauki batetan* **Â, B** *ondoz-ondoko angeluak zuzenak badira,* **AD** *eta* **BC** *aldeak ere berdinak dira,* **C** *angelua* **D** *angeluaren berdina da (I. ezaugarria), eta* **AD** *eta* BC *aldeak desberdinak badira,* C *eta* D *angeluen arteko handiena alderik txikienaren auzokidea da, eta alderantziz.* Beha dezagun, ezen lema honek inplizituki ukatzen duela V. postulatua, zeren **ABCD** lauki angeluzuzenbikoa bada, orduan, aipaturiko postulatuaren arabera, C eta D angeluak zuzenak bait dira; beraz, angelu hauek biak kamutsak zein zorrotzak izan daitezkeela onartuz, inplizituki onartzen da paraleloen postulatua. Saccheri-k, C eta D angeluei buruzko hiru hipotesiak eztabaidatu zituen, segidan aipaturiko eran izendatu zituelarik.

a) angelu zuzenaren hipotesia ($C = D = 1$ angeluzuzen)

b) angelu kamutsaren hipotesia ($C = D > 1$)

c) angelu zorrotzaren hipotesia ($C = D < 1$)

Angelu zuzenaren hipotesian, egiazkoa da V. postulatua, eta honek **Euklide**-ren geometriara eraman zuen Saccheri. Angelu kamutsaren hipotesiaz, errazki iritsi zen kontraesan honetara: zuzenaren izaera, luzera infinituko lerro ireki bezala ukatzea suposatzen duenera. Azkenik, setatsuki aritu zen angelu zorrotzaren hipotesia absurdutzat ematen, honetarako, logikan baino gehiago intuizioan oinarritu zelarik: *Angelu zorrotzaren hipotesia erabat faltsua* da, *lerro zuzenaren izaera bera gaitzesten bait du.* Egia esan, hirugarren hipotesiak, logikoki posiblea den sistema geometrikora doa, eta bera egite honetaz ohartu ez zen arren, paraleloen problemaren ebazpenerako Saccheri-ren ekarpen baliotsua onartu beharrean gaude, zeren, ideia berri eta interesgarriak ekarri zituzten bide ausartagoak eta sorkorrak ireki bait zituen.



3. irudia.

Saccheri-ren ondoren problema honetan aritu zen lehenengoa *J.H. Lambert* (1728-1777) izan zen, beronek *Theorie der Prallellinien* izeneko obraren hirugarren atalean, Saccheri-k proposaturiko ildoari jarraikiz, aipaturiko problema ikertu zuelarik. Funtsezko iruditzat lauki angeluzuzen-hirukoa erabili zuen, eta laugarren angeluaren izaeraren arabera, honako hiru hipotesiok finkatu zituen (3. irudia):

a) angelu zuzenaren hipotesia

b) angelu kamutsaren hipotesia

c) angelu zorrotzaren hipotesia

Lehenengo hipotesiak errazki eraman zuen sistema euklidearrera. Arkimede-ren postulatuan euskarritzen den arrazonamendu baten bidez, bigarren hipotesiaren faltsutasuna baieztatzea baimendu zion kontraesana erdietsi zuen arinki. Angelu zorrotzaren hipotesia ukatzea baimenduko liokeen kontraesanera iristen saiatu zen, ez zuen eriden baina; hau dela eta, V. postulatua frogaturik zegoela iragarri zuen. Bidean zehar, beranduago *geometria berria* izango zenari buruzko zenbait emaitza lortu zituen, hala nola:

Triangulu baten angeluen batura bi angeluzuzen baino txikigoa dela, triangelu baten defekturaren definizioa, defektua triangeluaren azalearen proportzionala dela,... Halaber, V, postulatuaren ukapenak luzera--unitatea absolutua izatea suposatzen duela aurkitu zuen, geometria euklidearrean, luzera-unitatea erlatiboa den bitartean.

Saccheri eta Lambert-en ikerketek ez dute paraleloen postulatuaren frogaezintasuna erakusten. XVIII. mendearen 2. erdian, postulatua frogatu gabe onartu behar zelako ideia aintzat hartzen hasi zen menaz. Saccheri eta Lambert-ek erabilitako eskemari eutsiz, baina kontraesanik aurkitzeko ardurarik gabe buruturiko problemaren azterketaren sakontasuna, V. postulatuaren frogaezintasunera iristeko eta geometria ez-euklidearrak kausitzeko pauso erabakitzailea izan zen.

A.M. Legendre (1752-1833) aurreko biek erabili zuten antzeko arrazonabideari jarraitu zitzaion, emaitza berririk ekarri ez zuelarik. hala ere, bere ikerketen azalpenari eman zion tankera dotore eta errazak, ideia berrien lantzaileen arloa zabaltzea baimendu zuen hedapenera iristea lortu zuen.

4.- GEOMETRIA EZ-EUKLIDEARRAREN ERIDELEAK

V. postulatua frogatzeko saioen porrotaldiak ia 2.000 urte iraun zituen arren, gaiari buruzko interesa ez zegoen hilik. XIX. mendearen hasierako geometra asko hipotesi euklidearra onartzeko gertu zeuden bitartean, ikerketari ekin zioten beste batzuk, egite honek sistema geometriko berrien aurkikuntza erraztu zuelarik.

Paraleloen problemari era egokian heldu zion lehena *C. F. Gauss* (1777-1855) izan zen. Euklide zuzen zegoela eta V postulatua beste axiomekiko independentea zela egiaztatzeaz gain, beronek, bere baitan iniolako kontraesanik ez zeukala eta euklidearraren desberdina zen geometria baten existentzia halabehartzen zuela behatu zuen. 1792. urtetik aurrerantzean eta problemarako lehen hurbilketaz, paraleloen postulatura frogatzen ahalegindu zen Saccheri-ren ideiari, hots, *reductio ad absurdum* delakoari jarraikiz, inolako kontraesanik eriden ez zuenez gero, geometria ez-euklidear baten existentzia susmatu zuelarik. Geroago, gairako bigarren hurbilketan, geometria berri baten funtsezko teoremak garatzen aritu zen. Lehenik *antieuklidearra* deitu zion, geroxeago *geometria astrala* eta azkenik ez-euklidearra. Dena dela, gaizki ulertua izatearen beldurraz eta polemikoak izango zirelakoan, ez zen ausartu ikerketa hauen emaitzak argitaratzera. Espazioaren problema deitufikoa zela eta, esangura zientifiiko handia lortzeaz gainera, filosofikoa ere erdiesten du geometria ez-euklidearraren eraiketak, zeren geometria euklidearraren izaera aprioristikoa baiezten zuten *E. Kant* eta filosofo idealisten doktrina kontraesaten bait zuen. Garaikide batzu, hala nola *W. Bolyai*, *F.A. Taurinus* eta abarrekiko postatrukeari eta bere gutunetan aurkituriko zenbait oharri esker, jakitun gaude Gauss-en problema honetarako ekarpenaz.

Geometria ez-euklidearra aditzera ematearen merezimendua, *N.I. Lobachevski* (1793-1856) eta *J. Bolyai*-ri (1802-1860) egokitu zitzaien. Lobachevski izan zen, hain zuzen ere, 1829.ean *Kazan Mesenger* izeneko aldizkari ilunean geometria berriaren garapean argitaratu zuen lehena.

Bolyai-k, 1832. urtean azaldu zituen bere ikerketak, *Wolfgang* bere aitak idatzitako *Tentamen* izeneko liburuaren eranskin batetan. Gauss-ek, argitara emana izan zeneko urte berean jakin zuen Bolyai-ren lanaz, eta 1840.ean Lobachvski-ren ekarpenaz, beronen aurkikuntzak biltzen zituen liburuska alemaniar baten bitartez. Hala eta guztiz ere, ixildu egin zituen bien ikerketen emaitzak.

Bolyai-ri, Lobachevski-ren lanaren berria eman ez zion arren, antza denez, hark beraren existentziaz jakin zuen 1848.ean; dena den, Lobachevski-k inoiz ez zuen jakin bere geometriak koaurkitzailerik zeukanik. Bai batek zein besteak, Saccheri-k finkaturiko eskemari eutsi zioten beren arrazonamenduetan. Hortakotz, Lobachevski-k lehen 27 proposizio euklidearrek osotzen dituzten printzipioak (definizio, axioma eta postulatuak) onartu eta gero, aurkako tesitzat ondoko hipotesia hartu zuen: *zuzen baten kanpo-puntu batetatik, bat ezezik, emandako zuzenaren paralelo bi gutxienez marra daitezke.*

Hipotesi honetatik abiaturik, ordea, ez zuen inolako kontraesanik eriden; beraz, lehenik, V. postulatua ezin dela frogatu esan zuen, eta bigarrenik, V. postulatua aurkako hipotesi batez ordezkatuz, geometria logikoki posiblea gara zitekeela, berau, *irudikaria* zeritzon geometria ez-eukliodear berritzat har litekeelarik. Bolyai-k, Saccheri eta Lambert-en bideari jarraikiz *paraleloen postulatuaren* frogapenean porrot egin ondoren, espazioaren geometria absolutua eraikitzen ihardun zuen metodo deduktiboa aplikatuz —grekoen metodo klasikoa— V. postulatuaren faltsutasun edo egiazkotasunaz *a priori* erabaki ez bazuen ere. Lobachevski-k, garapen handiagoa geometria irudikariari, edukin analitikoan bereziki, ematen zion bitartean, Bolyai-k sakontasun gehiagoz aztertu zuena, ea proposizio geometrikoek Euklide-ren postulatuarekiko menpekotasunik zeukatenentz izan zen. Lehenak, batez ere, zorioneko postulatuaren ukapenean oinarrituriko sistema geometrikoa eraiki nahi zuen, bigarrena, geometria euklidearreko V. postulatuarekiko menpekotasunik ez duten eta absolutuki egiazkoak izendatu zituen proposizio eta eraikuntzetan aritu zelarik.

G. Riemann-ek (1826-1866) zuzen paraleloen existentzia ukatxzen zuen postulatuaz ordeztu zuen *paraleloena*, suposamendu honetaz baliatuz, geometria riemanndar izenaz ezagutzen den sistema geometriko ez-euklidear logikoki posible bat garatu zuelarik.

Geometria euklidearra, hiperbolikoa deituriko Bolyai eta Lobachevski--ren geometriaren eta eliptikoa izeneko Riemann-enaren arteko kasu bezala agertzen zaigu.

5.- GEOMETRIA HIPERBOLIKOA ETA TEORIA FISIKOAK

Fisikarekiko geometriaren menpekotasuna Lobachevski-k adierazita zegoen jadanik, aurkikuntza fisiko berriekiko geometriaren legeen aldaketarako posibilitatea aurrikusi zuelarik.

Lobachevski-ren geometriak zenbait aplikazio dauzka matematika eta fisika teorikoan. Metodo geometrikoaren erabilpenak aurkezten duen abantaila, *grosso modo* ideia intuikorretan oinarritzean datza, Lobachevski-ren geometriaren eta erlatibitate murriztuaren teoriaren arteko lotura hustiratu zuen lehena *Varicak* fisikaria (1913) izan zelarik.

Fenomeno erlatibistak ulertzeko bide hau erabili dutenen artean, ondoko autore hauek aipatuko ditugu: *K. Ogura* (1913), *J.M. Plans y Freyre* (1921), *E. Borel* (1913), *V. Fock* (1959), *H. Yamasaki* (1965), *J.A. Smorodinskii* (1965), *R.H. Boyer* (1965), *N.A. Chernikov* (1974), *N.V. Efimov* (1980) ...

Geometria hiperbolikoaren beste aplikazio bat, zirkuituen teoria deituriko injineritza elektrikoaren adarrean aurkitzen dugu. Teoria honetarako aipaturiko geometriaren erabilpena 1946.ean hasi zen autore nederlandar eta alemaniar batzuren bidez, baina gorakadarik handiena EEBBtan gertatu zen berrogeitamarren hamarkadan. Besteren artean, *G.S. Deschamps* (1951, 1952, 1953), *E.F. Bolinder* (1958, 1959), *D.J.R. Stock* eta *L.J. Kaplan*-en (1962) ekarpenak azpimarratuko ditugu.

Zenbait fenomeno fisiko formulatzerakoan beha daiteke, ezen, kasu batzutan, beraien deskribapen egokia lor daitekeela geometria ez-euklidearraren erabilpenaz, ondoko hauek aipa ditzakegularik: Newton-en zinematika klasikoaren azterketa plano galilearrean, uhin elektromagnetikoen polarizazioa, ikusmen-espazioaren identifikazioa espazio hiperboliko modura, X izpien bidez kristal baten Laue diagramaren lorpen-prozesuaren eta plano eliptikoango homotezia baten arteko baliokidetasuna, ...

BIBLIOGRAFIA

BERNALTE; A. (1973): Uso del diagrama de Smith para representación de la cinemática relativista. *Electron. Fisc. Apli.*, 16, 2, 104-111.

BERNALTE; A. (1974): Comentarios sobre algunos aspectos geométricos de la difracción por redes cristalinas. *Electron. Fisc. Apli.*, 17, 3, 281-285.

BOLINDER, E.F. (1958): A survey of the use of non-euclidean geometry in electrical engineering. *Franklin Inst.* 265, 3, 169-186.

BONOLA, R. (1923): Geometrias No Euclideanas. Calpe. Madrid.

BOREL, E. (1913): La théorie de la relativité y la cinematique. *C.R. Acad.* Sci. Paris 156, 215-217.

BOREL. (1913): **La cinematique dans la théoric de la relativité**, *C.R. Acad. Sci. Paris* 157,703-705.

BOYER, R.H. (1965): **Some uses of hyperbolic velocity space**, *Am. I. Phys.* 33, 910-916.

COXETER, H.S.M. (1978): **Non - Euclidean Geometry** University of Toronto Press, Toronto.

CHERNIKOV, N.A. (1974): **Lobachevskii's Geometry and Relativistic Mechanics**, *Soviet Journal Particles & Nuclei (U.S.A.)* 4, 3.

DESCHAMPS, G.A.; RUMSEY, V.H.; KALES, M.L. et al. (1951): **Geometrical repreentation of the Polarization ofg a Plane Electromagnetic Wave**, *Proc. IRE*, 39, 540-544.

DOU; A. (1970): **Logical and historical remarks on Saccheri's Geometry**, *Notre Dame Journal of Formal Logic*. XI, 4.

EFIMOV, N.V. (1984): **Geometria Superior**. Mir. Moscú.

FOCK; V.A. (1959): **The theory of Space, Time and Gravitation**. Pergamon, New York.

GANS, D. (1973): **An Introduction to Non-Euclidean Geometry**. Academic Press, New York.

KAPLAN; L.J.; STOCK, D.J.R. (1962): **Non-Euyclidean Geometric Representations for Microware Netxworks**. *Mircrowave J.* 99-105 eta 114-120.

KELLY, P.; MATTHEWS, G. (1981): **The non-euclidean hyperbolic plane** Springer-Verlag, New York.

OGURA, K. (1913): **On the Lorentz transformation with some geometrical interpretations**. *Sendai, Tôhoku Imperial Univ. Science Reports*. II,2, 95-115.

PLANS Y FREYRE, J.M. (1921): **Nociones fundamentales de Mecánica Relativista**. *Real Acad. Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales*. 36-44.

SMORODINSKII, Ya.A (1965): **Kinematik u Lobatschewski Geometrie**. *Fortschritte der Physik* 13, 157-173.

VARICAK, V. (1912): **Über die nichteuklidische Interpretation der Relativistheorie**. *Jahresber. Deutsch. Match. Ver.* 21, 102-127.

YAMASAKI, H. (1965): **Explicit representation of the transformation Property of Physical Quantity of Dirac Electron with the Hiperbolic Metric of Velocity**. *Progress of Theoretical Physics*. 34, 3, 462-472.


BATZUTAN HOBEA DA EZEZAGUNA EZ ASKATZEA
ORDUAN NIK EZ DUT SOLUZIORIK