Elhuyar, 9, 2 (1983)

INTUIZIOA MEKANIKA TEORIKOAN

(erantzuna)

BALERE BARRERO eta FERNANDO MARTINEZ

Aurreko Elhuyar alean(9,(1), 125) proposatzen genuen problema ebatziko dugu artikulu honetan.

Problemaren eraikuntza

Hasierako hipotesiak:

a) Hutsean erorketa askea

b) Oso soka malgua.

c) Soka kontserbakorra.

d) Plataforma deformaezina.

Aipatutako hipotesien justifikapena:

a) Honela izango ez balitz, problemaren adierazpenean premiagabeko arazoak sortuko lirateke.

b) Oso soka malgu izateagaitik plataformari moldatzen zaio bera ukitzerakoan, hau da, ez du errebotatzen.

c) Soka-sistemak ez du energia mekanikorik galtzen erortze-prozesuan.

d) Hipotesi erredundagarria da sokak energiarik galtzen ez duenez lurrak ezin du deformaziozko energia potentzial elastikorik irabazi.

Erabili den nomenklatura:

E = Energia Mekanikoa

T = Energia Zinetikoa

V = Energia Potentzial grabitatorioa.

T_A = Sokaren tentsioa "A"n(11.irudia)

$(F_i)_B$ = Indar inpultsiboa "B"n

p = Higidura-kantitatea

I = Inpultsua

$\dot{x}$ = v = Abiadura

$\ddot{x}$ = a = azelerazioa

x = Sokaren goi muturreko elongazioa

g = Grabitatearen azelerazioa

R = Lurraren erreakzioa.

Problemaren ezezaguna lurraren "R" erreakzioa denez gero, Newtonen printzipioa

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt}$$

ez zaigu aski izango, sokaren mugimenduaren legea ateratzeko, ΣF aurrez ezagutzen ez badugu.

Baina, sistema kontserbakor bati buruz ari garenez(gradu bateko askatasunez) energi kontserbazioaren printzipioak lehen ordeneko integral bat emango digu, lehen aipatutako Newton-en legeari dagokionez.

Energia Mekanikoaren kontserbazioaren printzipioa

$$E = T + V = Kte \qquad (1)$$

Energiaren konstante honen balioa aurkitzeko hasierako posizioaren $\underline{E}$ energia kalkulatuko dugu (3. irudia).

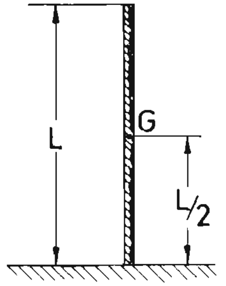
Hasierako hipotesiagaitik

$$E = T_0 + V_0$$

$$T_0 = 0$$

Honela:

$$E = V_0 = \mu g\ L.\frac{L}{2} = \frac{\mu g\ L^2}{2}$$



3. Irudia

"$\underline{x}$" parametroz definitutako posizio generiko batean(2.irudia, Elhuyar $\underline{9}$(1)126), hau dugu:

$$V = \mu g(L-x).\ \frac{L-x}{2} = \mu g\ \frac{(L-x)^2}{2}$$

$$T = \frac{L}{2}\mu(L-x).v^2$$

$\dot{x} = v = \dfrac{dx}{dt}$ = zati higigarriaren eroriera abiadura izanik.

$$E = T + V = \mu g\frac{(L-x)^2}{2} + \frac{1}{2}\mu(L-x).v^2$$

(1) ondorioztatzen da:

$$E = \mu g\ \frac{(L-x)^2}{2} + \frac{1}{2}\mu(L-x).v = \frac{\mu g L^2}{2}$$

$$\dot{x}^2 = v^2 = \frac{2\ Lx-x^2}{L-x}.g \qquad (2)$$

"x=L" egiten denean "v" infinito egiten dela nabaritzen da, guztiz ondorio harrigarria dena.

(2).ekuazioaren bi atalak denborarekiko deribatuz azelerazioa kalkulatuko dugu.

$$2\dot{x}\ddot{x} = \frac{(2L-2x).x.(L-x)+(2Lx-x^2).x}{(L-x)^2}.g$$

$$\ddot{x} = \frac{2(L-x)^2 + 2Lx - x^2}{2(L-x)^2} \cdot g$$

sinplifikatuz:

$$\ddot{x} = a = \left[\frac{2Lx-x^2}{2L-x)^2} + 1\right] \cdot g \qquad (3)$$

$x = 0 \longrightarrow a = g$ argiro nabaritzen dugu.

$x > 0 \longrightarrow a > g$ "harrigarria"

$x = L \quad a = \infty$ "harrigarria"

Soka kontserbakor baten erorketa, grabe batena baino azkarragoa dela adierazten dute emaitzek

Oharra: $x = x(t)$ x elongazioa denborarekin erlazionatzen duen legea lortzeko ez dugu (2).ekuazioa integratu.

Probleman honen helburua hau ez denez funtzio elementalak erabiliaz ezin daiteke adierazi x funtzio **eliptikoa** delako.

Beraz:

$$V = \sqrt{\frac{2Lx-x^2}{L-x} \cdot g} = \frac{dx}{dt}$$

$$dt = \frac{dx\sqrt{L-x}}{\sqrt{g}\cdot\sqrt{2Lx-x^2}}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{g}}\int_0^x \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)\cdot(2Lx-x^2)}} \cdot dx$$

"t" integrala eliptikoa da.

"R"ren kalkulua

$\dot{x}$ eta $\ddot{x}$, "x"en funtzio bezala lortu ondoren Newton-en legea aplikatuko dugu.

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt}$$

Sistema soka osoa da.

$$\Sigma F = \mu g L - R$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}[\mu\,(L-\dot{x})] =$$

$$= -\mu\,\dot{x}^2 + \mu\,(L-x)\,\ddot{x}$$

(2)tik eta (3)tik ordezkatuz

$$\mu g L - R = -\mu\,\frac{2Lx-x^2}{L-x}\,g + $$

$$+ \mu\,(L-x)\left[1 + \frac{1}{2}\frac{Lx-x^2}{(L-x)^2}\right] g$$

$$R = \mu\,\frac{2Lx-x^2}{L-x}\,g + \mu x g - \mu\,\frac{2Lx-x^2}{2(L-x)}\,g$$

$$R = \frac{\mu g}{2(L-x)}\left[2(2Lx-x^2) + 2(L-x)x - (2L-x^2)\right]$$

$$R = \frac{4L-3x}{2(L-x)}\,\mu g x \qquad (4)$$

J.L Merian-ek proposatutako problema era honetara erabakia gelditzen da.

Problemari emandako tratamenduak, ordea, ez du onartzen (soka osotasunean kontsideratu denez) problema honen garapenean lortutako erantzun harrigarriak ($a > g$, e.a.) gure intuizioarekin bat egitea.

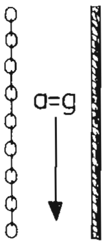
Horregatik, arazo hau landuko dugu, ikuspegi dinamiko batez problema enfokatuz. Sokaren zati higikorra isolatuz, beharrezko da onartzea, indarren batek "beharantz tiratzen duela", eta sokaren pisuan gehituz $a > g$ azelerazioa lortzen duela .

Ikuspegi energetikotik

Zoluaren gainean pilatutako sokaren edozein zatik energia galdu du eta soka sistema kontserbakorra denez, oraindik lurjotzen ari den zati horrek galdutako energia jaso behar du energiaren kontserbazio-printzipioa manten dadin.

Orduan hau lortzeko bere energia zinetikoa handitzea baino beste biderik ez du hau da "g" baino azelerazio handiagoa lortzen du.

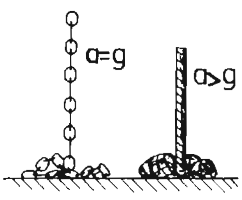
Azalpen dinamikoa



4.Irudia

Hutsean askeki,katenmaila askeko katea bat eta soka bat erortzen direnean,grabitatearen azelerazioz egiten dutela garbi dago.

Arrazoi honegaitik, beren edozein puntutan tentsioa edo trakzioaren indarra baliogabekoa da. (4.Irudia)

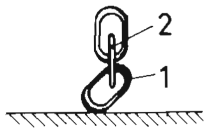


5.Irudia

Baina lurra ikuitzen badute, beste hau gertatzen da:(5.Irudia)

Katearen edozein puntutako tentsioak (esate baterako, bi katenmailen arteko trakzioaren indarra) baliogabea jarraitzen du.

Ondorengo honetara iristeko behatzea aski da: bat batean gelditzen den katenmailak, lurraren kontra kolpatzerakoan (1 katenmaila) ez du inolako efekturik lortzen beste katenmailetan.

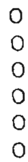


6.Irudia

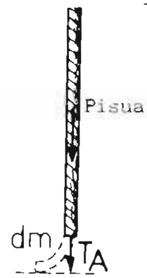
Beste era batetara esateko "2 katenmaila" ez da jabetzen "1 katenmailak" lurra ikuitu duenik.

Beraz, katea katenmailak deskonektatuta egongo balira bezala, indibidualki erortzen dela esan dezakegu (7.Irudia)

8.Irudia



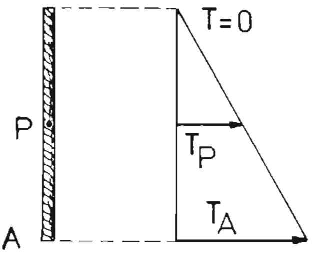
7.Irudia



7.Irudia

Zati higikorraren azelerazioa "g" baino handiagoa bada honek indar baten menpe egon behar du. Zati higikor eta geldiaren arteko "A" separazio puntuan, indar hau eta zati higikorraren berezko pixuari batuz gero, a > g izatea lortuko da une bakoitzean. (8.Irudia)

Bestaldetik, sokaren izaera kontutan izanik, lortutako indar honek traziozkoa izan behar du noski: behe aldera bideratutako indar bat.



9.Irudia

Bitarteko indar hau, **sokaren A puntuko tentsioa** da eta T_A bezala azalduko dugu.

Edozein unetan tentsioaren balioa edo trakzioaren indarra, sokaren puntu desberdinetan ez da konstantea aldatze lineal bat jaraitzen du bere luzeran zuhar, A puntuan balio maximoa higikarraren muturrean **0** izanik.

T_A ren kalkulua

Zati higikorra bakarrik utzirik (8.Irudia) eta Dinamikaren oinarrizko printzipioa aplikatuz:

$$\Sigma F = m.a$$

eta instant generiko batean m masa izanik, hau jarri dezakegu.

$$\mu g\ (L-x) + T_A = \mu\ (L-x).a$$

lortutako a balorea ordezkatuz:

$$\mu g\ (L-x) + T_A =$$

$$= \mu\,(L-x)\left[1 + \frac{2Lx-x^2}{2(L-x)^2}\right] g$$

askatuz eta erraztuz:

$$T_A = \frac{2Lx-x^2}{2(L-x)}\ \mu g \qquad (5)$$

Oharra: Ikusi dugunez F = m.a Newton-en legea idatz daiteke, m masazko partikula material batetaz ari bagina bezala. Bestaldetik m masa hori **ez da konstantea** x-en funtzioa baizik. $m = \mu\,(L-x)$ baina sokaren zati bat isolatuz gero dagokion bitarteko indarra sartuz, izoztu egin dugu (nolabait adierazteko) kontsideratutako sokaren zatia.

Kasu honetan, masa aldakorreko sistemaren zati bat isolatzen dugunean Newton-en legea honela idatzia onartzen da ere, honela:

$F = m\ .\ a$, erabilkorra da

Alderantziz, lege hau aplikatzen badugu bere era unibertsalean, kontu handia eduki behar da deribatzerakoan.

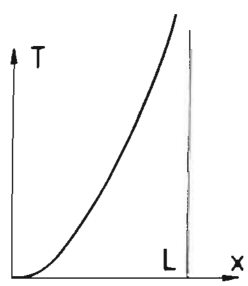
$\mathbf{p} = \mu\,(L-x)\ .\ x$ hau da

$\mu\ (L-x)$ konstante bezala

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mu\ (L-x)\ .\ \ddot{x}$$

(2) kontutan edukiz gero:

$$T_A = \mu\,\frac{v^2}{2} \qquad (6)$$



10.Irudia

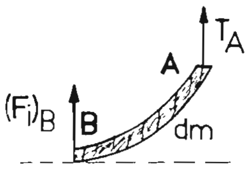
x-i balioak emanaz:

$x = 0$ denean $T_A = 0$

$x = L$ denean $T_A = \infty$

Lurraz (edo pilatuta dagoen sokaz) ukitzerakoan gelditu egiten den $\underline{dm}$ elementua isolatuko dugu orain.

Bi indarren bide, bere bi muturren loturen indarrak hain zuzen, taxututa gelditzen da $\underline{dm}$ elementu hau:



11.Irudia

Lehen kontsideratutako T_A, bere modulu eta norabidean gordetzen dituena (akzio- eta erreakzio-printzipioz) baina bere norantza, gorantza da orain; eta $(F_i)_B$, B puntuan.

Bi indar hauen batuketak $\underline{dm}$ sokaren elementua bapatean gelditzeko beharrezko den inpultsoa sortzen du.

$(F_i)_B$ .KALKULUA

Kolisioaren momentuan, inpultsuaren teorena $\underline{dm}$ elementuari aplikatzen diogu.

$$I = \Delta p$$

Gorantz, norantza positiboa hartzu.

$$I = [\ (F_i)_B + T_A\ ]\ dt$$

$$\Delta p = 0 - (-dm\ .\ v) = dm.v$$

Honela bada:

$$[(F_i)_B + T_A]\ dt = dm.v =$$

$$= \mu\ .dx.v$$

$$(F_i)_B + T_A = \frac{dx.v}{dt} = \mu .v^2$$

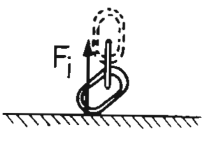
(5)rekin konparatuz eta askatuz:

$$(F_i)_B = \mu .v^2 - \mu.\frac{v^2}{2} = \mu .\frac{v^2}{2} = T_A \qquad (7)$$

Oharra: Bestaldetik, erabide berdintsua jarraituz, katenmaila askeko katearen erorketa-fenomenoa azter dezakegu. Hau da, katearen $\underline{dm}$ bat isolatzen dugu (katenmailaren masarekin identifikatzen duguna) era desberdinez gertatzen dira gauzak:

Lurra ukitu berri duen 1 katenmailak **indar bakar batetaz** (F_i) geldi arazia izan da kolisioaren puntuan hain zuzen.

Inpultsoaren teorena katenmaila bakoitzari aplikatuz, indar hau kalkulatu daiteke.



12.Irudia

(Katenmailen lurraren kontrako txokea kontsideratuz inelastiko perfektutzat bezala)

$$F_i\ .dt = dm.v = \mu.dx.v$$

$$F_i = \frac{\mu .dx.v}{dt} = \mu' .v^2 \qquad (8)$$

Bestalde katea grabitatearen azelerazioz erortzen denez gero,

$$v^2 = 2.g.x \qquad ; \qquad F_i = \mu\ 2gx$$

katearen erorketa prozesuan, $\underline{x}$-en funtzioz lurraren erreakzioa kalkulatu nahi badugu, hiru indar bertikalen oreka-baldintza agertzea aski izango da:

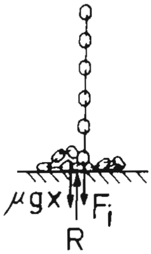
1.- $\mu .g.x$ = Aplikatutako zatiaren pisua

2.- $F_i = 2\mu gx$ = Indar inpultsiboa.

3.- R = Lurraren erreakzioa.

$$R - \mu gx - 2\mu gx = 0$$

$$R = 3\mu gx \qquad (9)$$



13.Irudia

Erantzun berdinera iritsiko ginatekeen katea osoki kontsideratuz eta Newton-en legea katearen osotasunari aplikatuz.

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt}$$

baldintza hauetan:

$$\Sigma F = \mu gL - R$$

(μgL = Katea osoaren pisua)

$p = \mu (L-x).v$ = Katea osoaren higidura-kantitatea

$$\frac{dp}{dt} = -\mu v^2 + \mu (L-x).a \qquad \text{non,}$$

$$v^2 = 2gx$$

eta

$$a = g \qquad \text{bait dira.}$$

honela ba:

$$\mu gL - R = -\mu .2gx + \mu (L-x).g$$

nondik:

$$R = 3\mu gx \qquad (10)$$

Azkenik, lurraren erreakzioa sokaren aurrean (x-en funtzioz) kalkulatzeko, lur gainean pilaturik dagoen sokaren zatia isolatzea nahiko da ($(F_i)_B$ bitarteko indarra- orain beherantz abiatuko dena sartuz noski.

Pilatutako zatiaren oreka dela kausa:

$$\Sigma F = 0 \qquad \text{hau da:}$$

$$R - (F_i)_B - \mu gx = 0 \quad \text{libratzen:}$$

$$R = (F_i)_B + \mu gx = \text{ordezkatzen:}$$

$$= \frac{2Lx - x^2}{2(L-x)}\mu g + x.\mu g = \frac{2Lx - x^2 + 2Lx - 2x}{2(L-x)}\mu g$$

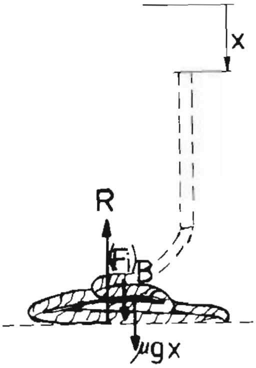
$$R = \mu gx \frac{4L-3x}{2(L-x)} \qquad (11)$$

Azken kontsiderazioak

Orain lehen egindako galderari erantzuna eman diezaiokegu.

Pisuaz aparte, zer indarrek tiratzen dute sokatik?

Adierazgarria (6) eta (7) ex-



14.Irudia

presioetan aurki daiteke, dm masa duen soka-elementua, gelditzean sokak ematen dion T_A indarra[$(F_i)_B$ aparte] gorantz.

Elementu honen (akzioa eta erreakzioa) sokan T_A indarra(tentsioa) **beherantz soka gainazeleratuz** sortzen du gelditzean.

Experimentuaren benetako baldintzarik ez dute betetzen suposamendu teoriko idealek.

a) Erorketa hutsean ez da gertatzen, eta arrazoi honengatik airearekiko igurtzimendua daukagu, eta espero zitekeen bezala energia mekanikoa beroa bihurtzen da etabar.

b) Benetako soka horiek ez dira guztiz malguak.

c) Benetako soka horiek ez dira guztiz kontserbakorrak.

d) Lurraren kontrako txokea ez da guztiz plastikoa.

Baina faktore guzti hauek ez dira oztopo, fenomeno hau errealitatean ikusteko. Zer gertatzen da sokaren erorialdia bukatzerakoan?

Mekanika klasikoaren ikuspegitik sokaren abiadura bere azken fasean infinito bihurtzen da.

Mekanika klasikoaren eremutik irten gabe, problemaren adierazian J.L. Merin-ek egiten duen bezala esan beharko genuke, soka **bere azken fasean ez dela kontserbakorra.**

Azken momentuan sokaren,

$$\frac{\mu gL}{2}$$

energia konstantea, zartada dela eta, lurrera pasatzen da, lurrean energia almazenatuta gelditurik, (energia potentziala, elastikoa, beroa eta abar bezala).

Honela ez balitz sokak, bere izaera kontserbakorra ez duela inoiz galtzen suposatu beharko genuke.

Honek suposa arazten digu dm sokaren azken elementuak lurra kolpatzen duenean(abiadura infinitoz)elastikoki errebotatzen duela goratz abiatuz $V = \infty$ eta higidura alderantziz errepikatuz, ziklo indefinituak deskribatuz.

Beraz, ondorio moduan gure hasierako hipotesiak ez direla betetzen esan dezakegu.