

BESTE
ZENBAIT

JOLAS MATEMATIKOAK

J.M. GOÑI eta JUANITO ETXEBERRIA

Ale honetan paradoxak alde batera utzi eta Lewis Carrol-en, "Alizia mundu harrigarrian"eko egilearen, fantasiako munduan sartuko gara.

Autore hau, bere benetako izena Charles Lutwidge Dodgson delarik, idazle ona izatek aparte, matematikari handia eta Logikako maixua izan zen.

Bere idazlanetan sartuko gara eta bere txango ederretan agertzen dituen buruketak eta egoeren azterketak azalduko ditugu.

Lehenengoa Erlojuen buruketa izango da, mesedez berak egiten dituen arrazonamenduak jarraitu puntuz-puntu:

Zein da hobia erloju bat urtean behin ordua ondo ematen

duena ala erloju bat egunean bi aldiz ordua ongi ematen duena? Azkenengo hau, erantzungo duzu zihur Aski, ederto, orain entzun.

Pentsa ezazu bi erloju ditugula. Bietako bat geldirik dago bestea, berriz, ibiltzen bada ere egunero minutu bat atzeratzen da. Zein aukeratuko zenuke ordua zein den jakiteko? "Atzeratzen dena" erantzungo duzu seguru asko. Ez duzu gehiegi pentsatu, begira: minutu bat egunean atzeratzen denak 12 ordu itxaron behar du (720 min) berriz ordua ongi adierazteko; horregatik bi urtetan behin ematen du ordua ongi eta bestea berriz puntuala da gelditutako orduan, hau egunean bi aldiz gertatzen da.

Horregatik ez duzu arrazoirik.

Ah! baina, -esango duzu- Zerta rako balio du egunean bi aldiz puntuala izatea ez badakit noiz den ordu hori?

Bueno pentsa dezagun erlojuan zortzirak direla, erlojua 8retan puntuala izango da, erlojuak ordua ondo emango du zortzirak direnean. Bai, ikusten dut esango didazu. Ederto, berriz ere ez duzu arrazoirik, orain atera sartu duzun hanka eta ahalegindu: zaitetz ez gehiago sartzen.

Jarrai dezakezu zera esaten: Nola jakingo nuke zortzirak direla? Erloju batek ez dit esango. Lasaitu, zuk badakizu zortzirak direnean erlojuak ondo dagoela, ederto, orduan beste hau egin behar duzu, ondo begiratu erlojua eta ordua ematen duen momentuan zortzirak izango dira. Baina... esango duzu, nahiko baina da, hobeto izango da zure alferrikako pentsakera hori uztea, beti gertatzen den gauza bat denez gero. Gehiago galdetzen baduzu gehiago urrunduko zara egiatik, hobeto izango da orduan isiltzea.

Hau izan da bere arrazonamenduen erakusgarri bat. Hauetako arrazonamenduen ondoan L.Carroll-ek buruketa batzuk agertzen dizkigu, eta honetako bi planteatuko dizkizuet. Lehenengoa hau da: Kgovj-ni Gobernadore Agintariak bazkari txiki bat eman nahi du eta hortanako bere aitaren koinatua, bere anaia^{ren} aitagarnearen anaia eta bere koinatuaren aita gonbidatu ditu.

Zenbat gonbidatu eduki zituen? Lewis Carroll buruketa hau planteatu baino lehen luze hitz egiten du gobernadorearen zekenkeriaz.

Bere idazlanetan ikusten dugun beste buruketa bat hau da, eta nahiz eta datu batzuk falta direla pentsatu ebaizpena baduela eta ba-

karna, gainera. Buruketa ondoko hau da:

Bi mendizale goizeko zortziretan inten, gailurrefa ailegatu eta etxera etorri dira. Etxera eguerdiko ordubietan puntuan ailegatu dira. Hau da bakarrik haiek zekitena. Zenbat km. egin zituzten eta zein ordutan ailegatu ziren gailurrera galdetuz gero ez zekiten erantzuten. Bazekitena zera zan: aldatz gora zen lekuetan orduko 3 km. egiten zituztela leku lauan orduko 4 km. eta aldatz beheetan orduko 6 km. Zenbat km egin zituzten eta zein ordutan ailegatu ziren gailurrera?

Lewis Carrollen beste alde bat logika, silogismo eta absurdoarekiko pasioa edo grina da, hau erakusten duen bi buruketa emango dizkizuet.

Lehenengoa, katu batek Aliziari bera erotuta dagoela agertzen dio Aliziak galdetzen dio: nola dakizu erotuta zaudela? Hasteko, erantzun dio katuak, jakingo duzu txakurrak zer bait ez duenean nahi kurrinkak egiten duela eta pozik dagoenean buztana mugitzen duela; ni pozik nagoenean, berriz, kurrinkak egiten dut eta asarnatzen naizenean buztana mugitzen dut, hortaz erotuta nago.

Zergatik da okerra katuaren arrazonamendua? Dena dela, katuaren planteamendua horren eroa da, hori egiteko nahiko eroa egon behar duela halaz eta gurtiz ere zeuk aurkitu behar duzu zein den arrazonamendu honeñ okerra.

Orain bi silogismo esango ditugu.

Lehenengoa hau da:

Gizon denak hilkorrak dira. Socrates gizona da. Socrates orduan hilkorra da. Hau egi biribila da.

Goazen bigarrenarekin:

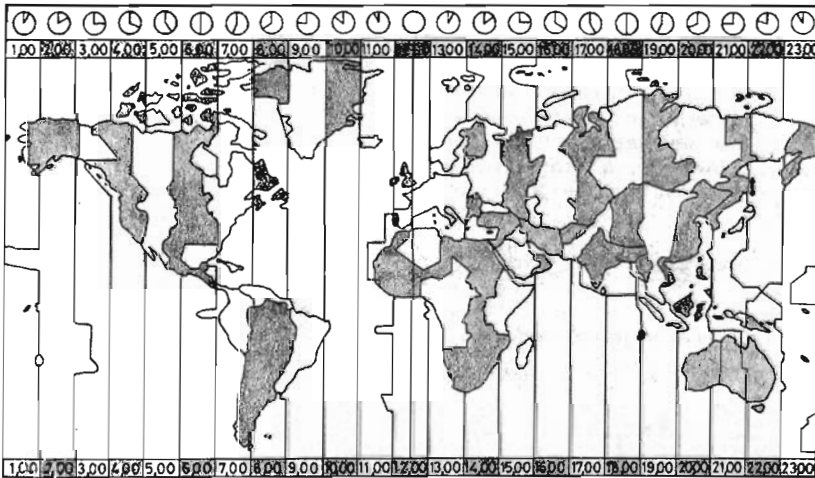
Galdu ez duzuna zuk daukazu, adarrik ez duzu galdu, orduan badituzu.

Hau ez da egia. Zein da bigarrenaren okerra?

Azkenik eta L.Carrollen matematikako eta logikako lanen azkenengo erakusgarri bezala agertuko dizuegu paradoxa bat. Nahiz eta oso ezaguna izan korapilatsua izaten

zaigun paradoxa bat. Nahiz eta oso ezaguna izan korapilatsua izaten jarraitzen du eta erakutsiko digu zuen trebetasuna.. Buruketa hau berak egiten duena baino ulergarriago emango badugu, paradoxa berdina da.

Hemen dugu mapa bat ordulari-ardatz desberginak emanaz. Bere planteamendua hau da:



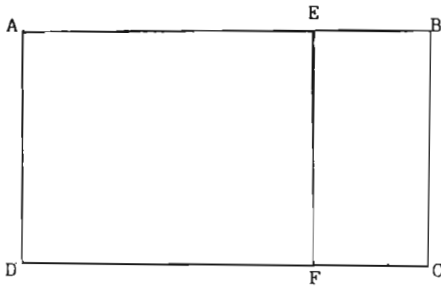
Momentu honetan Donostian hilaren 27ko arratsaldeko 8rak badira, denok badakigu Canariasen ordu bat guttiago dela, eta 7rak direla. Baita egia da, Mexikokin 6 ordutako desberdintasuna dugula, ordu honetan Mexikon arratsaldeko ordubiak dira. Alaskan 11 ordu gutxiago dira eta goizeko 9ak dira. Antipodetan ezkerretik 12 ordu gutxiagorez direnez momentu honetan hilaren 27ko goizeko 8rak direla.

Ederto! Badakigu ere Italian momentu honetan gaueko 9ak direla. Ordu bat aurretik doaz. Indian 5 ordu aurretik doaz eta orain hilaren 28ko goizeko ordubata da, Japonen 8 ordu aurretik doazelako

orain hilaren 28ko goizeko laurak dira eta horrela segitu berriro ere Antipodetaraino ailegatuko gara. Horregatik paradoxa baten gaude. Antipodetan (batera) momentu berdinean 27ko goizeko 8rak eta 28ko goizeko 8 dira.

Nola erabaki liteke paradoxa hau? Bere liburutan soluzio gabe uzten du. Zuen soluzio guztiak onartuta izango dira. Eta geureak hurrengo zenbakian emango ditugu.

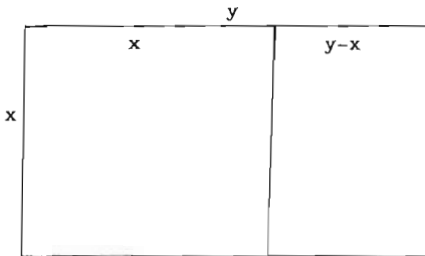
Bukatu aurretik azken zenbakian jarritako problemaren ebazpena azaldu nahi dugu. Gogora dezagun planteatzen genuen problema.



ABCD laukizuzen bat izanik AB eta AD aldeek gorde beharko duten proportzioa eskatzen da, bertan AEFD karratua sartzean sortzen den EBCF laukizuzen berria eta hasierako ABCD-ko hori antzekoak izan daitezten.

AB-ren luzera y letraz aiderazi ko dugu.

AD-ren luzera x letraz adierazi ko dugu.



- AB → y
- AD → x
- AE → x
- BC → x
- EB → y-x

Hasierako ABCD laukizuzena eta EBCF berria antzekoak dira ondorengo berdintza hau betez gero:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{EB} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y-x}$$

Eratorpen matematikoa segituz:

$$y^2 - xy = x^2$$

$$x^2 + xy - y^2 = 0$$

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 4y^2}}{2}$$

$$x = \frac{-y \pm y\sqrt{5}}{2}$$

Erro positiboak balio du bakarririk:

$$x = \frac{-y + y\sqrt{5}}{2}$$

$$x = y \cdot \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Ebazpen algebraikoa hortxe dago baina ez da hori gu bilatzen ari garena geometrikoa baizik, hots konpasa eta erregela tresna bakarretzat harturik burutzen dena.

Arazoa, modu geometriko batez bederen, honela planteatzen da: y luzera dato moduan hartuz gero nola marraztu beste x bat bi horien arteko

$$\frac{x}{y} \text{ arrazoia } \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ izan dadin}$$

Hona hemen erantzuna:

$$AB = y$$

$$BH = y \text{ AB luzatu eta B-tik konpasaren bidez berrin y jarri}$$

$$AH = 2 \cdot y$$

AM = y eta elkarzuta AB-rekiko. A-ren bi aldeetan distantzia berdina markatu eta ondoren zuzenki horren erdikaria eraiki A-tik pasatzen da eta elkarzuta da AB-rekiko, zuzen horretan

