Elhuyar,8,3,1982

DINAMIKA ERLATIBISTAREN SARRERA (3)

LUIS M.BANDRES
FISIKA DEPARTAMENTUA-KIMIKA FAKULTATEA
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
P.K. 1072 - D O N O S T I A

sarrera.

Bi aurreko artikuluetan "Mekanika Erlatibistaren lehen urratsak"(Elhuyar,8,1,1982)eta "Zinematika Erlatibista Murriztuaren zenbait adibide"(Elhuyar 8,2,1982) teoria erlatibistaren bigarren postulatua(argiaren abiaduraren konstantetasuna)erabiliz,Lorentz-en transformazioa lortu genuen.Transformazio horren bidez,gertaera harrigarri batzuk ere aztertu genituen(luzeraren uzkurdura edo denboraren zabalkuntza,adibidez);gertaera horien azkeneko oinarria argiaren abiaduraren konstantetasun-hipotesia zen.

Lorentz-en transformazioak, Galileo-renak bezala,beren artean higidura erlatibo uniforme bat daukaten erreferentzi sistema desberdinetan egindako behaketak erlazionatzen ditu;baina erlatibitatearen bigarren postulatua Lorentz-enak soilik betetzen du.

Ikus dezagun hemen Newton-en bigarren legea Lorentz-en transformazioaren arabera eta egiazta dezagun lege hori aldaezina ote den ala ez.

Demostratu dugun bezala,azelerazioa Galileo-ren transformazioan aldaezina da(ikus "Mekanika erlatibistaren lehen urratsak"). Hortaz R eta R´ bi sistemetan, bata bestearekiko u abiadura uniforme batez higituz eta abiadura horrek XX´ ardatzaren direkzioa baldin badauka,zatiki baten azelerazioaren x osagaiek zera betetzen dute $a_x = a'_x$ (a_x R-tik begiratuta eta a'_x R´-tik).R-n dagoen behatzaile batek Newton-en bigarren legea idazterakoan,hauxe idatziko luke:$F_x = m.a_x$ eta R´-ko beste batek: $F'_x = m.a'_x$.

Galileo-ren transformazioan masa konstantea dela suposatzen bada,indarra R-tik nahiz R´-tik ikusita berdina da.Newton-en bigarren legea Galileo-ren transformazioan aldaezina da.

Zer gertatuko zaio lege horri Lorentz-en transformazioaren arabera?.

R-ko behatzaileak zera idatziko du:

$$F_x = m \frac{dv_x}{dt}$$

eta R´-koak:

$$F'_x = m'\frac{dv'_x}{dt}$$

Baina,

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1-\frac{uv_x}{c^2}}$$ (ikus "Zinematika erlatibista murriztuaren zenbait adibide")

eta:

$$\frac{dv'_x}{dt'} = \frac{dv'_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'}$$

Hemen:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) \quad \text{eta } \gamma \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

izanik.Beraz,

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)}$$

eta

$$\frac{dv'_x}{dt} = \frac{dv'_x}{dv_x}\cdot\frac{dv_x}{dt} = \left[\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^{-1} + \frac{u}{c^2}(v_x-u)\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^{-3}\right]\frac{dv_x}{dt}$$

Azkenik:

$$\frac{dv'_x}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{c^4-(c^2-u^2)}{(c^2-uv_x)^3}\cdot\frac{dv_x}{dt} \quad \text{edo,} \quad a'_x = \frac{1}{\gamma}\,\frac{c^4-(c^2-u^2)}{(c^2-uv_x)^3}\cdot a_x$$

Beraz, azelerazioa Lorentz-en transformazioaren arabera ez da aldaezina.

Agian, zailtasun honen iturria Newton-en bigarren legearen gure idazkera ($F=m.a=m\frac{dv}{dt}$) izan da. Zeren honela, inplizituki, masaren denborarekiko konstantetasuna onartu bait dugu. Lege honek beste idazkera orokorrago bat dauka:

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

Azken idazkera honetan masa denborarekiko aldakorra izan daiteke, baina hori posible al da?.

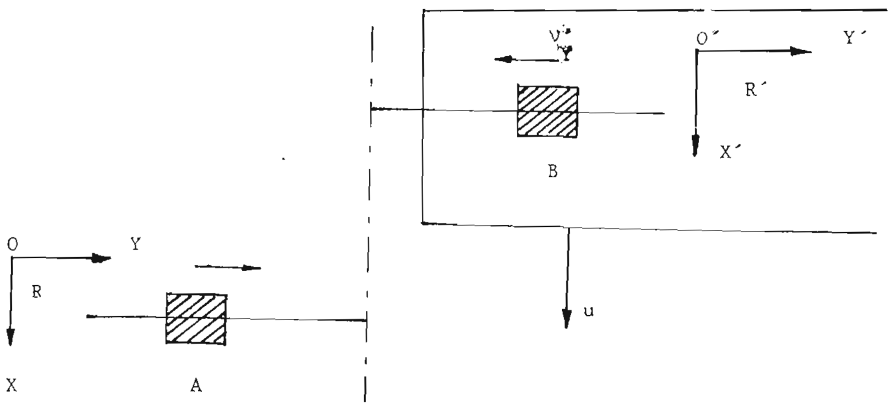
Fisika Orokorrak adierazten digun bezala, bi gorputzen arteko talkan momentu lineala kontserbatu egiten da. Eta, talka elastikoa izango balitz, gorputzak masa berdinekoak eta beren abiadurak berdinak eta kontrakoak, talka ostean, abiadurak inbertitu egingo lirateke.

1. Irudia

Lehen esandakoa,errail baten gainean irristatzen diren masa berdineko eta marruskadurarik gabeko bi mugikarien bidez adie raz daiteke.

Suposa dezagun erraila erdi tik ebakitzen dela,bi mugikari- ak lehen esan bezala botatzen direla eta ebakigunean talka egiten dutela.Saiakuntza,ebaki dura egin baino lehenagokoa be- zala da eta bide batez ondori- oak berdinak izango dira.

Baina,kontsidera dezagun erra laren bi erdiak banatuta daudela horietako bat geldirik dagoela eta bestea mugitzen,eta aldiune batean,errailaren bi erdiak au- rrez aurre daudenean,masa berdi- neko,abiadura berdineko eta nora tza kontrako bi mugikariek elkar talka egiten dutela.Egoera honek lehen aipatutakoaren berdina dir di eta bi irristagailuek beren abiadurak inberti ditzatela itxa ron daiteke;baina azter dezagun egoera hau Mekanika Erlatibista- ren ikuspuntutik.



2.Irudia

R eta R´ bi erreferentzi sistemak, geldirik dagoen errailerdiarekin eta higitzen ari denarekin elkartuko ditugu hurrenez-hurren. Suposa dezagun x eta x´ ardatzek errailerdiaren higiduraren direkzioa dutela eta y eta y´ardatzak mugikarien planoan daudela(ikus 2.irudia). Izan bitez A,R sistemako mugikaria eta B,R´-koa. Talka egin baino lehen A-k v_y abiadura darama (R-n neurtuta) eta B-k v'_y(R´-n neurtuta).

Onar dezagun energiaren kontserbazio-legea eta momentu linealarena espazioaren eta denboraren uniformitasunaren ondorioak direla eta beraz, oinarrizkoak direla. Erabil ditzagun, bada, bi sistemetan:

R sisteman talka elastikoa bada R´-n hala izango da eta momentu lineala kontserbatu egingo da, R-n nahiz R´-n.

Talka gertatu baino lehen, B-ren abiaduraren y osagaia R-tik begiratuta hauxe izango da:

$$v_y = \frac{-v'_y}{\gamma\left(1+\frac{uv'_x}{c^2}\right)}$$

Baina, v'_x zero da(B,y´ardatzaren gainean higitzen delako). Beraz,

$$v_y = \frac{-v'_y}{\gamma}$$

Talka egin ondoren R-tik begiratuta B mugikariak,

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma}$$

abiadura izango du.

R´-tik begiratuta, talka egin baino lehen, B mugikariak $-v'_y$ abiadura izango du, eta ondoren v'_y.

Onar dezagun mugikarien masak higidurarekiko ez direla independenteak. Hau adierazteko, honela idatziko dugu momentu lineala:

$$\vec{p} = m(v) \cdot \vec{v}$$

Hemen m(v)-k, mugikariaren masa bere abiadura v denean adierazten du.

R´-tik begiratuta, B-ren abiaduraren modulua beti v'_y da. Beraz, bere masa beti $m(v'_y)$ izango da R´-tik ikusita, noski.

Aldiz, R-tik begiratuta, B-ren

abiaduraren modulua

$$v = \left[v_y'^2 + u^2\right]^{1/2}$$

da eta talka egin aurretik eta ondoren berdina da,zeren dagoen aldakuntza bakarra $-v_y'$,v_y' bihurtzea bait da.Beraz, R sisteman B-ren masa m(v) da.

Idatz ditzagun y-y' direkzioko abiaduraren eta momentu linealaren osagaiak eta baita ere B mugikariarengan ematen den momentu linealaren aldakuntza:

	Talka aurretik		Talka ondoren		Momentu linealaren aldakuntza
	Abiadura	Momentu lineala	Abiadura	Momentu lineala	
R sisteman	$-v_y'/\gamma$	$-m(v).v_y'/\gamma$	v_y'/γ	$m(v).v_y'/\gamma$	$\frac{2m(v).v_y'}{\gamma}$
R' sisteman	$-v_y'$	$-m(v_y').v_y'$	v_y'	$m(v_y').v_y'$	$2m(v_y').v_y'$

Eman dezagun orain talka R-tik begiratu beharrean R'-tik begiratzen dela.Bi sistemen arteko higidura,uniformea denez gero,R'-ko behatzaileak bere errailerdia geldirik dagoela esango luke eta beste errailerdia -u abiadura batez higitzen dela.Beraz, R'-ko behatzaileak B-ren momentu linealaren aldakuntza,R-ko behatzaileak A-rentzat neurtzen zuenaren berdina (norantza kontrakoa,noski) neurtuko du.Biek zera ikusten dute: mugikari bat bere errailerditik aurreratzen eta gero abiadura berdin batez atzeratzen.

R nahiz R' sistemetan momentu lineala kontserbatzen dela onartzen dugunez gero,R-tik neurtzen den B-ren momentu linealaren aldakuntza, zeinua alde batera utzirik R-tik A-rena bezain batekoa izango da eta beraz,baita ere R'-tik ikusten den B-ren momentu linealaren aldakuntzaren berdina.

Orduan, taulatik zera atera dezakegu:

$$\frac{2m(v).v'_y}{\gamma} = 2m(v'_y).v'_y$$

do,

$$m(v) = \gamma .m(v'_y)$$

Eraman dezagun limitera $v'_y \rightarrow 0$ denean $v \rightarrow u$ doa; beraz, $m(u) = \gamma .m_o$, edo $m = \gamma m_o$.

$m_o = m(o)$ "pausaguneko masa" da eta $m = m(u)$ u abiadurako "higidura-masa" da (askotan "masa erlatibista" ere esan ohi zaiona).

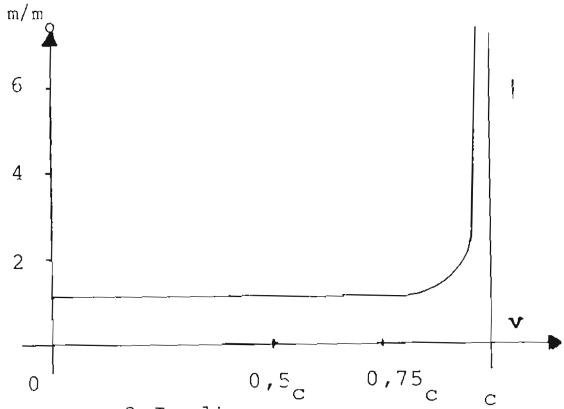
Nahiz eta hemen egindako azterketa talka elastiko baten kasurako izan, lortutako emaitza guztiz orokorra da eta edozein zatikirekin eta edozein kasurako baliagarria dela demostra daiteke.

Beraz, R sistema batekiko zatiki batek v abiadura badauka, R´ sistema zatikiarekin lotuta dagoela kontsideratuz u = v daukagu eta R sisteman bere masa zera izango da:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$m = \gamma m_o$ erlazioak masa handiagoa egiten dela behatzailearen eta objektuaren arteko abiadura erlatiboa handiagoa izan ala adierazten digu; orduan, v abiadurak c-rantz jotzerakoan masak infinitorantz jotzen du. Edo beste hitzez, zatiki bat c abiaduraraino eramateko behar den indarra infinitoa da, hau da, c abiadura hori eskura ez daitekeen limite bat da.

3.irudian abiadurarekin masaren aldakuntza adierazten da.



3.Irudia

energia:

Masaren aldakortasuna ikusi ondoren (hau bai dela jipoi ederra Fisika Klasikoarentzat!), ikus dezagun zer gertatzen den oinarrizkoa den beste kontzeptu honekin, hots, energiarekin.

A puntu batetik B puntu batera raino doan zatiki bati ematen zaion lana zera da:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}.\vec{ds}$$

Indar-eremua kontserbakorra bada lan hori ibilbidearekiko independentea da eta $U_B - U_A$ energia potentzialaren aldakuntzaren berdina da:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\,\vec{ds} = \int_A^B m\,\frac{\vec{dv}.\vec{ds}}{dt} =$$

$$= \int_A^B m\vec{v}\,\vec{dv} = \frac{1}{2}\,mv_B^2 - \frac{1}{2}\,mv_A^2$$

Mekanika Klasikoaren arabera.

Berregin dezagun hau Mekanika Erlatibistaren ikuspuntutik:

Orain arte ikusitakoa dela eta Dinamika Erlatibistan indarraren definizioa bezala zera hartu behar da:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d(\gamma\, m_o\, \vec{v})}{dt} = m_o\,\frac{d(\gamma\,\vec{v})}{dt}$$

Hau lanaren formulara eramaten bada zera dugu:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}.\vec{ds} = \int_A^B \frac{d}{dt}\,(m_o\,\gamma\,\vec{v}).\vec{ds} =$$

$$= \int_A^B d(m_o\,\gamma\,\vec{v}).\vec{v}$$

Integral hau parteka eginez:

$$W_{AB} = \left[m_o\,\gamma\,v^2\right]_A^B + \left[m_o\,c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\right]_A^B$$

$$= \left[\frac{m_o\,c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right]_A^B = \left[mc^2\right]_A^B$$

Zatikia hasieran A puntuan geldirik bazegoen eta B punturaino v abiaduraz iristen bada,Mekanika Klasikoarekin analogia bat eginez,zatikiak lortutako energia zinetikoa zera dela esan ohi da:

$$E_K = \left[mc^2\right]_{v_A=0}^{v_B=v} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2 =$$

$$= mc^2 - m_o c^2$$

Expresio hau limitean formula klasikoa bihurtzen da:

$$E_K = m_o c^2\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right] =$$

$$= m_o c^2\left[\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\,\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right) - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2} m_o v^2 + \frac{3}{8} m_o \frac{v^4}{c^2} + \ldots \approx \frac{1}{2} m_o v^2$$

$v \ll c$ denean

Argi eta garbi ikusten den ːzala mc^2 eta $m_o c^2$ energiak di ı.Einstein-ek zera iradoki zuen: $_o c^2$ zatikiaren pausaguneko ma- ıri dagokion energia intrintse- ɔa izan zitekeela eta zatikia- ən "pausaguneko energia" deitu ion.Orduan mc^2 energia osoa zango litzateke,hots,pausagune- ɔ energia gehi energia zineti- ɔa.Beraz,

$$E = mc^2$$

E,energia osoa izanik.

Formula honek zera adierazten lu:energiaren eta masaren arte- :o baliokidetasun bat badagoela ːta bata bestea bihur daitekee- .a eta alderantziz.

Berez,$E_K = (m-m_o)\,c^2 > \frac{1}{2} m_o v^2$ zeren gai guztiak positiboak ɔait dira.Masa erlatibista,abia- ɗurarekin batera handiagoa egi- ten denez gero,zatiki bat azele razio konstante batez edukitzeko behar den indarra etengabe han- diagoa egin behar da eta energia zinetikoaren gehikuntza ezarrita ko indarrarekiko zuzenki propor- tzionala denez gero,zatikiari ematen zaion energia zinetikoa balio klasikokoa baino handiagoa da.

adibide bat.

Zenbatekoa da egiten den erro- rea elektroi baten energia zine- tikoa Newton-en formularen bidez kalkulatzerakoan?

Bere abiadura:

a) 10^8 m/s -koa bada

b) 2.10^8 m/s-koa bada.

a) Newton-en bidez:

$$E_K = \frac{1}{2} m_o v^2 = \frac{1}{2} \times 9{,}11 \times 10^{-31} \times 10^{16} =$$

$$= 4{,}16 \times 10^{-15}\ J$$

Formula erlatibistaren bidez:

$$E_K = (m-m_o)c^2 = (\gamma - 1)\, m_o c^2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{10^{16}}{2{,}998^2 \times 10^{16}}}} =$$

$$= 1{,}060749$$

$$E_K = 0{,}060749 \times 9{,}11 \times 10^{-31} \times 8{,}988 \times 10^{16} =$$

$$= 4{,}97 \times 10^{-15}\ J$$

$$\Delta E_K = (4{,}97-4{,}16)\times 10^{-15} = 0{,}81\times 10^{-15}\ J$$

$$\frac{\Delta E_K}{E_K} = \frac{0{,}81\times 10^{-15}}{4{,}97\times 10^{-15}} = 0{,}08006 = \%\,8{,}006$$

b) Newton-en bidez

$$E_K = \frac{1}{2}\times 9{,}11\times 10^{-31}\times 4\times 10^{16} = 16{,}64\times 10^{-15} J$$

Formula erlatibistaren bidez

$$E_K = (\gamma - 1)\, m_o c^2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\times 10^{16}}{2{,}998^2\times 10^{16}}}} = 1{,}342358$$

$$E_k = 0{,}342358\times 9{,}11\times 10^{-31}\times 8{,}988\times 10^{16} =$$

$$= 28{,}03\times 10^{-15}\ J$$

$$\Delta E_K = (28{,}03 - 16{,}64)\times 10^{-15} =$$

$$= 11{,}39\times 10^{-15}$$

$$\frac{\Delta E_K}{E_K} = \frac{11{,}39\times 10^{-15}}{16{,}64\times 10^{-15}} = 0{,}68449 =$$

$$= \%\,68{,}499$$