Elhuyar,8,2,1982

ZINEMATIKA ERLATIBISTA MURRIZTUAREN ZENBAIT ADIBIDE

L.M.BANDRES
FISIKA DEPARTAMENTUA-KIMIKA FAKULTATEA
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
P.K. 1072 - D O N O S T I A

Lehengo artikuluan "Mekanika erlatibistaren lehen urratsak" (Elhuyar 82.1)Galileoren transformazioa Lorentz-enaren bidez gaindituta zegoela ikusi genuen. Oraingo honetan,Lorentz-en transformazio hori erabiltzerakoan agertzen diren ondorio harrigarri batzuk(itxuraz)aztertuko ditugu.Dena den,aztertuko ditugun fenomenoen harrigarritasun horiek,argiaren abiaduraren inguruko abiaduretan agertzen dira soilik eta beraz,guretzat oso arraroak izatea guztiz normala da.Artikulu hau goian esandako artikuluaren jarraipena kontsidera daiteke.

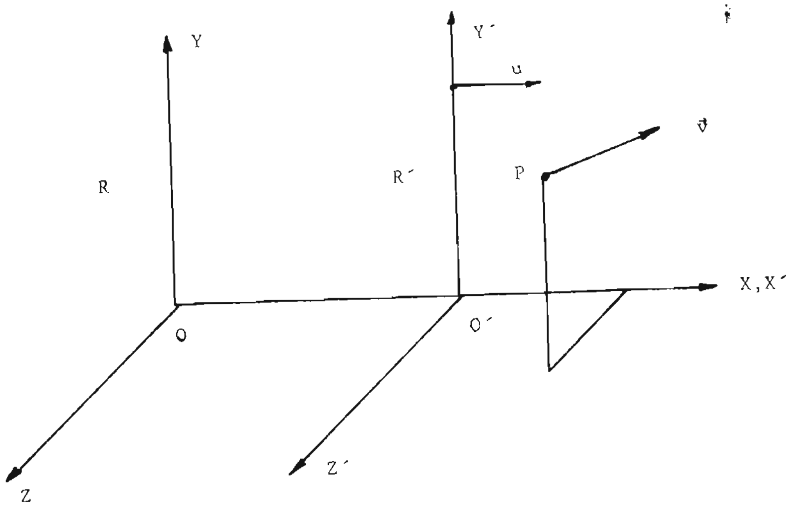
Lehen puntu harrigarria hauxe da:denbora eta espazioa elkarrekiko independienteak ez direla ikustea.Fisika klasikoan bi kontzeptu hauek guztiz independienteak ziren.Hemen,fenomeno bat gertatzen den t´ aldiunea,R´ erreferentzi sistema batetik begiratuta,ez da soilik t aldiunearen funtzioa(hau da,beste R sistema batetik fenomeno ber-berari dagokion aldiunearena),baizik baita ere bigarren sistema horretan dagokion koordenatuarena.Espazio/denbora erlazioa argiagoa ikusten da ondoko gai inbariantea begiratzerakoan:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

c.t biderkadurak luzera baten dimentsioak ditu.Beraz,c.t beste koordenatu berri bat bezala kontsidera daiteke;baina,c(argiaren abiadura)konstantea denez gero,aldatzen dena t da eta horregatik sarri askotan"espazioaren laugarren dimentsioa"dela esan ohi da.Honek ez du esan nahi denbora eta espazioa baliokideak direnik,baizik eta posizio--neurketak egiterakoan denbora kontutan hartu behar dela eta alderantziz,guzti hau higidura erlatiboak daudenean,noski.

Aurki dezagun Lorentz-en transformazioak dakarren ondorioa abiaduren alorrean.

Bitez R eta R´ bi erreferentzi sistema inertzial eta kontsidera dezagun R´,R-rekiko higitzen ari dela u abiadura batez.Bi sistemek x ardatza komuna dute eta u abiadura konstanteak ardatz horren direkzioa du.



1.Irudia

Kontsidera dezagun P zatiki bat R sistemarekiko $\vec{v}$ abiadura batez eta R´-rekiko $\vec{v}'$abiaduraz higitzen ari dela.Abiadura hauen osagaiak sistema bakoitzean hauexek dira:

$$\vec{v}(v_x,v_y,v_z) \quad \text{eta} \quad \vec{v}'(v'_x,v'_y,v'_z)$$

Galileoren transformazioa era

biliko bagenu,zera lortuko genuke: $v'_x = v_x - u \quad v'_y = v_y \quad v'_z = v_z$ eta hau da gure experientziak bat batean erakusten diguna.Baina erabil dezagun Lorentz-en transformazioa:

$$v'_x = \frac{d'_x}{dt'} = \frac{d'_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'}$$

eta,

$$v_x = \frac{d_x}{dt} \quad \text{badira}$$

$$\frac{d'_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\gamma(x-ut)\right] = \gamma(v_x - u)$$

eta,

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right)\right] =$$

$$= \gamma\left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)$$

beraz:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

Beste osagaiekin antzekoa eginez:

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'}$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt} \quad \frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)}$$

eta analogoki:

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)}$$

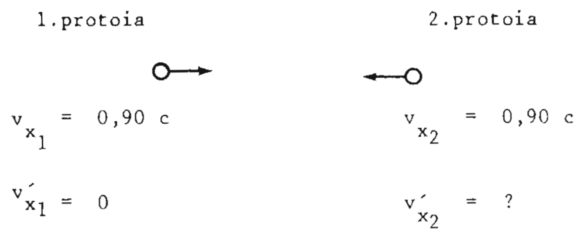
Beraz,zinematika erlatibistan v eta v´ ez daude batuketa bektorialaren legeen bidez erlazionaturik.Behar diren erlazioak hemen ikusitakoak dira(eta beren alderantzizkoak,noski).

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \quad , \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{uv'_x}{c^2}\right)} \quad ,$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{uv'_x}{c^2}\right)}$$

Ohar gaitezen,higidura erlatiboaren direkzioa x ardatzarena izan arren,abiaduraren y eta z osagaiek ere transformazioaren ondorioak jasan egiten dituztela.

Azter dezagun adibide bat: Bi protoi 0,90 c abiaduraz elkarren kontra doaz(sorta-talken experimentua).Protoi baten gainean dagoen behatzaile batek zenbateko abiaduraz ikusten du beste protoia?.



2.Irudia

1.protoia R´-rekiko geldirik kontsideratzen badugu,orduan, R´, R-rekiko, $u = 0,90\ c$ abiaduraz higitzen da.Kanpoan,hots, R sisteman dagoen behatzaile batek zera ikusiko du:

1.protoia : $v_{x_1} = 0,90\ c$

2.protoia : $v_{x_2} = -0,90\ c$

R´ sisteman $v'_{x_1} = 0$ izango da. Mekanika klasikoaren arabera,2. protoiaren abiadura $v'_{x_2} = -1,80\ c$ izango litzateke.

Baina Fisika erlatibistaren arabera:

$$v'_{x_2} = \frac{v_{x_2} - u}{1 - \frac{uv_{x_2}}{c^2}} = \frac{-0,90c - 0,90\ c}{1 + 0,90x0,90} =$$

$$= -\ 0,994\ c$$

eta hau da egia eta ez bestea.

Suposa dezagun 2.protoia γ izpi bat dela eta beraz R-tik argiaren abiaduraz ikusiko genuke.R´-tik zein abiaduraz ikusiko genuke?

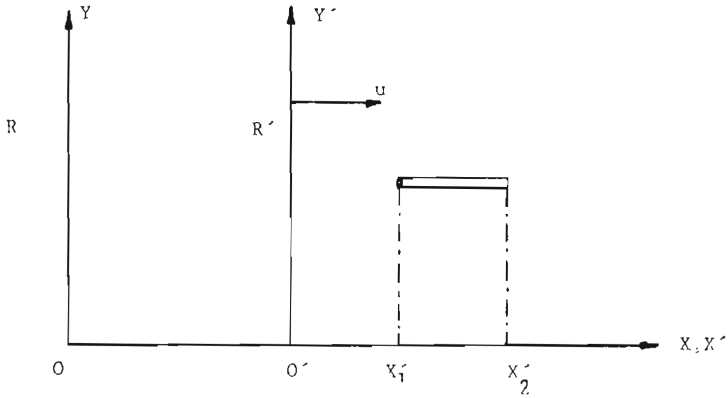
$$v'_{x_2} = \frac{-c - 0,90\ c}{1 + 0,90} = -c$$

Hau da, 1.protoiaren gainean dagoen behatzaileak ere c abiadura neurtuko luke.Hemen frogatzen dugu argi eta garbi Lorentzen transformazioan argiaren abiadura konstante bat dela.

luzeraren uzkurdura

Suposa dezagun higitzen ari den barra baten luzera neurtu nahi dela.Erraztasuna medio dela eta,barraren higidura-direkzioa barrarena dela onartuko dugu.

Bi erreferentzi sistema hartuko ditugu:R sistema,gurekiko geldirik dagoena eta R´sistema barrarekiko geldirik dagoena.R´sistema hau R sistemarekiko u abiaduraz higitzen da(barraren abiadura era u da)



3.Irudia

R´sisteman barraren koordenatuak x_1' eta x_2' dira.R sisteman barraren abiadura neurtzeko bere bi muturren posizioak aldiune berean jakin behar dira eta hau ez da huskeri bat,ez horixe! Honetarako zera egingo dugu: R sisteman zenbait behatzaile ipiniko dugu eta bakoitzari ordulari sinkronizatu bat emango diogu.Behatzaile horietako bakoitzak,bere ordulariaren bidez,barraren muturrak bere aurretik noiz pasatzen diren neurtuko du.Bitez t_1 eta t_2 aldiune hauek.Behaketa hauetatik zera aterako dugu:aldiune berean behatzaile batek barraren aurreko muturraren pasatzea neurtuko du eta besteak atzeko muturrarena ; behatzaile bi hauen koordenatuak x_2 eta x_1 baldin badira,orduan R sisteman,barraren luzera x_2-x_1 izango da.

Lorentz-en transformazioaren arabera,koordenatu guzti hauen arteko erlazioak hauexek dira:

$$x_1' = \gamma\,(x_1 - ut_1) \text{ eta } x_2' = \gamma\,(x_2 - ut_2)$$

Beraz, R´ sisteman barraren L´ luzera hauxe da:

$$L' = x_2' - x_1' = \gamma\,(x_2 - x_1) - \gamma\, u(t_2 - t_1)$$

Baina $t_1 = t_2$ denean,$x_2 - x_1$, barraren luzera L izango da.

Orduan,

$$L'\gamma = L = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

edo,

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

u beti c baino txikiagoa denez gero, γ bat baino handiagoa da edo $L' > L$.

Beraz, higitzen ari den edozein gorputz bat "geldirik" dagoen baten ikuspuntutik "uzkurtuta" dago. Uzkurdura hori higiduraren direkzioan ematen da eta dagokion faktorea $1/\gamma$ da.

Hemen ikusitakoaren magnitude-maila adierazteko adibide bat ipiniko dugu:

Kohete batekiko geldirik dagoen behatzaile batentzat kohete horren luzera 25 m-koa da. Zenbatekoa izango litzateke luzera hori Lurrean geratzen den behatzaile batentzat koheteareen abidurak ondokoak badira: a) 36000 km/h, b) 36 milioi km/h, c) 360 milioi km/h, d) 720 milioi km/h, e) 1.044 milioi km/h.

Hona hemen askapenak:

a) $36.000 \frac{km}{h} = 10^4 \frac{m}{s}$; $\frac{u}{c} = 3,3 \times 10^{-5}$; $1 - \frac{u^2}{c^2} = 1 - 1,089 \times 10^{-9} \simeq 1$

Behatzaileak 30 m neurtuko ditu(bederatzigarren zifra ez badu nabaritzen,noski

b) $36 \times 10^6 \frac{km}{h} = 10^7 \frac{m}{s}$; $\frac{u}{c} = 3,3 \times 10^{-2}$; $1 - \frac{u^2}{c^2} = 1 - 1,111 \times 10^{-3} = 0,9988$

$$L_b = 30 \times 0,9988 = 29,666 \text{ m.}$$

c) $36 \times 10^7 \frac{km}{h} = 10^8 \frac{m}{s}$; $\frac{u}{c} = 3,3 \times 10^{-1}$; $1 - \frac{u^2}{c^2} = 1 - 1,089 \times 10^{-1} = 0,8911$

$$L_c = 30 \times 0,8911 = 26,733 \text{ m.}$$

d) $72 \times 10^7 \frac{km}{h} = 2 \times 10^8 \frac{m}{s}$; $\frac{u}{c} = 6,6 \times 10^{-1}$; $1 - \frac{u^2}{c^2} = 1 - 4,356 \times 10^{-1} = 0,5644$

$$L_d = 30 \times 0,5644 = 16,932 \text{ m.}$$

e) $1,044 \times 10^9 \frac{km}{h} = 2,9 \times 10^8 \frac{m}{s}$; $\frac{u}{c} = 0,966$; $1 - \frac{u^2}{c^2} = 1 - 0,9344 = 0,0655$

$$L_e = 30 \times 0,0655 = 1,966 \text{ m.}$$

Azaltzen zaigun bezala, uzkurdura ez da nabaria abiadura 10^7 m/s -koa izan arte. Baina hortik aurrera efektua oso azkar hazten da.

Esandako uzkurdura hori behakuntza-motaren ondorio bat besterik ez da, hots, kobetearen egituran ez da inongo aldaketa fisikorik gertatzen.

denboraren zabalkuntza

Erlatibitatean, Lorentz-en transformazioa dela eta, luzerak uzkurtzen diren bitartean denbora zabaldu egiten dela ikusiko dugu. Horretarako, R eta R´sistemei lotutako behatzaileen denbora-neurketak alderatu beharko ditugu. Suposa dezagun R´-rekiko geldirik dagoen zatiki ezegonkor bat sorterazten dugula. Jo dezagun zatiki horren bizi-iraupena laburra dela eta berehala desagertu egiten dela. R´-n dagoen behatzaileak zatiki horren bizitza bezala epe bat neurtuko du. Zenbat neurtuko luke R sisteman (laborategian) dagoen beste behatzaile batek?.

Onar dezagun R sistemako zatikiaren sorlekuan dagoen ordulari batek zatikia sortzen denean t_1 aldiunea markatzen duela eta desagerlekuan dagoen beste ordulariak zatikia desagertzen denean t_2 (bi ordulari hauek sinkronizatuta daude). R-ko behatzaileak zatikiaren bizitza-epea bezala $\tau = t_1 - t_2$ neurtzen du. Baina R eta R´ sistemen denborak Lorentz-en transformazioaren bidez erlazionaturik daude:

$$t_2 = \gamma\left[t_2' + \frac{ux_2'}{c^2}\right] \qquad t_1 = \gamma\left[t_1' + \frac{ux_1'}{c^2}\right]$$

$$\tau = t_2 - t_1 = \gamma\,(t_2' - t_1') + \frac{\gamma u}{c^2}(x_2' - x_1')$$

Baina zatikia R´sistemarekiko geldirik dago, hau da: $x_2' = x_1'$. R´sisteman zatikiaren bizitza-epea $\tau' = t_2' - t_1'$ da. Beraz, zera daukagu:

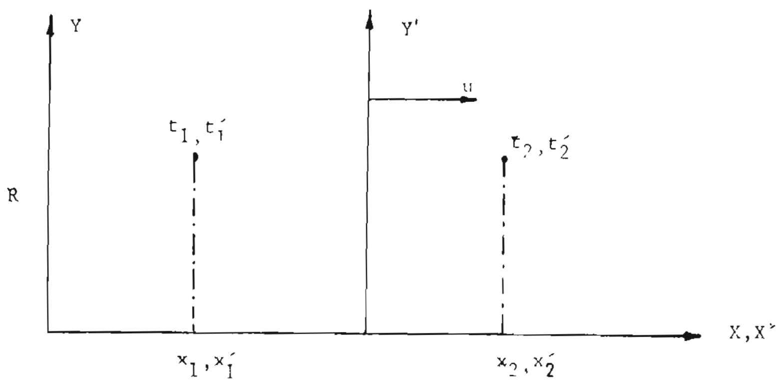
$$\tau = \gamma\,\tau'$$

γ beti bat baino handiagoa denez gero, R sisteman neurtzen den epea R´-n baino handiagoa da. Efektu honi "denboraren zabalkuntza" deritzo.

Edozein fenomeno baten iraupenik laburrena fenomenoarekin batera higitzen ari den ordulari baten bidez neurtzen dena da eta "denbora propioa" esaten zaio. Fenomenoarekiko higitzen ari den edozein behatzaile batek neurtuko duen epea denbora propioa baina handiagoa izango da.Edo beste hitzez:fenomenoarekin lotuta dagoen eta higitzen ari den edozein ordulari bat,erreferentzi sisteman geldirik dagoena baino astirotsuago doa,epe laburrago bar neurtzen bait du eta.Behatzaile nagusiarekiko,hots,R sisteman dagoen behatzailearekiko higitzen ari diren ordulari guztiak,behatzailearena baino geldiago doaz.Denboraren zabalkuntza higidura erlatiboari dagokion zerbait da:denboraren neurketa ez da gauza absolutua,behatzailearen sistemarekiko erlatiboa den zerbait baizik.

bateratasuna

Bi fenomeno "batera" gertatzen direla esaten dugunean,biak aldiune berean gertatu direla adierazi nahi dugu.Bedi R sistema bat eta eman dezagun bere x_1 eta x_2 puntuetan bi fenomeno gertatzen direla.Bi fenomeno hauek batera gertatzen badira zera daukagu:$t_1 = t_2$; t_1 lehenengo fenomenoaren gertakuntzaren aldiunea, eta t_2 bigarrenarenak izanik.



4.Irudia

Bedi 4.irudian agertzen den egoera.x_1 eta x_2 puntuetan dauden bi behatzaileek bi fenomenoak gertatzen direnean beren ordulari sinkronizatuez aldiune bera neurtzen badute,bi fenomenoak batera izan direla esango dute.Baina,zeintzuk izango dira aldiuneak R'sistemarako ,hots, R sistemarekiko u abiadura batez higitzen ari den sistemako behatzaileentzat?.Hauentzat fenomenoen gertakuntzaren aldiuneak t_1' eta t_2' izango dira ,hau da :

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{ux_1}{c^2}\right) \quad \text{eta}$$

$$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{ux_2}{c^2}\right)$$

eraz,

$$t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1) - \frac{\gamma u}{c^2}(x_2 - x_1)$$

Horregatik,orokortasun guztia ekin,bi fenomenoak R´-n ez dira atera izango.R-n batera baldin adira eta $x_1 = x_2$ bada, orduan R´-n ere batera izango dira.Bes- ela,diferentzia hauxe izango da:

$$t_2' - t_1' = -\frac{\gamma u}{c^2}(x_2 - x_1)$$

Beraz,bateratasunaren kontzep tua ere ez da gauza absolutu bat, sistemaren higidurari dagokion zerbait baizik.

Kausalki erlazionaturiko gertaerak

Bitez R sistema batean t_1 eta t_2 aldiunetan gertatzen diren bi fenomeno($t_1 \neq t_2$ izanik).R´ sis- tematik begiratuta,bi fenomeno horien gertakuntza-ordena R-re- kiko inbertituta egon daiteke.Hori gerta dadin ala ez,$\frac{u}{c^2}(t_2-t_1)$, (t_2-t_1)-rekiko nolakoa denaren arabera izango da.Bi fenomenoak R eta R´ sistemetan orden berean gerta daitezen, $t_2' > t_1'$ izan beharko du; $t_2 > t_1$ denean ,

$$t_2 - t_1 > \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1) \quad \text{da .}$$

Baina $\frac{u}{c}$ zatidurak har dezakeen baliorik handiena bat da.Inongo sistema inertzialetan ordena inberti ez dadin,

$$t_2 - t_1 > \frac{1}{c}(x_2 - x_1)$$

izan beharko da, edo:

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1).$$

Baina azkeneko hau,hots,$c(t_2-t_1)$, argiak $t_2 - t_1$ epean bete dezakeen bidea da.Beraz,bi fenomenoen gertakuntza-ordena ez da inolaz ere inbertituko,fenomenoak gertatzen diren puntuen arteko distantzia, bi fenomenoen arteko epean argiak bete dezakeen bidea baino txikiagoa bada.

Bi gertaera kausalki erlazionatuta egongo dira baldin eta bigarren gertaeraren gertakuntza lehenengoaren ondorio bat bezala kontsidera badaiteke.Kausalki erlazionaturik dauden bi fenomenoen gertakuntza-ordena inongo sistemetan ez da inbertitu ahal izango . Aldiz,kausalki erlazionaturik ez dauden bi fenomenoen gertakuntza--ordena bat ala bestea izan daiteke,erreferentzi sistemaren arabera.Ikus dezagun azkeneko honen adibide bat.

Jupiter-en Io satelitea Lurretik begiratzen bada, planetak 9 ordu, 58 min-tan eklipsatzen duela neur daiteke (denbora hori behatokiko ordulariaren bidez neurtzen da). Jupiter-en behatzaile bat egongo balitz, eta berak behatokiko ordulariarekin sinkronizatuta dagoen beste ordulari bat izango balu, egun berean Lurrak Ilargia 9 ord. 27 min-tan eklipsatzen duela ikusiko luke. Aldiune horretan Jupiter-en eta Lurraren arteko distantzia $8x10^{11}$ m-koa da: a) Zenbatekoa izan beharko du Lurretik Jupiter-era doan kohete baten abiadurarik txikiena, bertatik Io-ren eklipsea Ilargiarena baino lehen gertatzen ikus dadin? b) Zenbatekoa izan beharko litzateke bi fenomeno horien arteko eperik txikiena, agian biak erlazio kausal batez loturik egon daitezen?

a) Kohetetik fenomenak kontrako ordenean ikusteko zera izan beharko dugu:

$$\frac{u}{c^2}(x_2 - x_1) > t_2 - t_1 = 1860 \text{ s}$$

$$x_2 - x_1 = 8 \times 10^{11}$$

$$u > \frac{1860\ c^2}{8 \times 10^{11}} = 0{,}697\ c \quad m/s$$

b) **Agian erlazio kausal bat izateko**, hauxe gertatu behar da:

$$t_2 - t_1 > \frac{x_2 - x_1}{c} = \frac{8x10^{11}}{3x10^8} = 2{,}66x10^3 \text{ s}.$$

Beraz, Io-ren eklipsea Ilargiarena baino gutxienez berrogeitabost minutu beranduago gertatu behar da

Guzti honekin oso lotuta dagoen beste gertaera bitxi eta harrigarria "bizkien paradoxa" deitutakoa da; baina hau aldizkari honetan aztertua izan zen (ikus Elhuyar, 16. zenbakia (1978) 62. orr.) eta beraz ez dugu orain berriz hemen ikertuko.