Elhuyar,7,2,1981

ZIENTZI
GAI
OROKORRAK

MATEMATIKA BERRIA: AUZI ZAHAR BAT

Jesus M. Goñi

Azken urteotan asko hitzegin izan da,gehiegi agian,Matematika berria delakoari eta bere eraberritzeari buruz irakaskuntza munduan.Diskusio honen eraginez,gai honi buruz zeuden uste eta aburuak gogor aldatzen ari dira;garaia da,nere eritzian,giro nahasi honetan oreka baten bila saiatzeko.

Gai honetaz hitzegiten den bakoitzean,nahi eta nahiezkoa dirudi Pedagogiaren arlora pasatzea; nere lantxo honetan gainditu egin nahiko nuke tentazio hori eta,behinbehingoz izango bada ere,auzi honen erro historiko eta epistemologikoetan murgildu.Uste ustel asko zabaldu dira eremu honetan eta bidezkoa iruditu zait puntu honi buruz zenbait gogoeta plazaratzea.

Gaur eguneko Matematikak daukan "status" zientifikoa ez da betidanik horrelakoa izan,greziarren artean lortu bide zuen,lehen aldiz horrelakorik:greziarren aurretiko herriak ezaguera matematiko zabal baten jabe ziren(greziarrena berarena baino zabalagoa zenbait sailetan) baina ez ziren gai izan Matematika bera aztergai hartzeko eta menperatzen zituzten edukin matematikoak teorizatzeko.Lorpen honen ohorea pitagorikoei eman behar zaie,eta beraiekin batera kultura greziarrari.Tradizio honen barruan,gainera,Euklides izeneko matematikariaren lana gailentzen da Euklidesek "Elementuak" izeneko liburu-bilduma bat idatzi zuen, eta bertan modu berezi batez bildu zituen garai hartan ezagutzen ziren edukin matematikoak. Euklidesen lanaren garrantzi aparta ez datza, ez horixe, berak asmaturiko gauza berrietan, baizik eta dagoenekoz ezagunak ziren gaiak azaltzeko erabili zuen metodoan.

Labur dezagun, gauzak apur bat soilduz, metodo honen ezaugarri berezkoenak zeintzuk ziren:

a) Guztiz deduktiboa zen: Euklidesek bost axiomatatik deribatzen du geometria osoa.

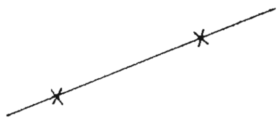
b) Axiomen egiazkotasuna bere ebidentzia intuitiboan finkatzen zen: axiomen egiazkotasuna intuizioaren balioan oinarrituz, begien bistak ikusten zuena baieztatzen zen. Ebidentzia hori ukatu nahi izateak zoro baten kapritxoa emango zukeen edonorentzat.

Eman dezagun, bada, adibide bat:

1. axioma: bi puntuk zuzen bat definitzen dute.

Nork uka lezake horrelako axioma baten ebidentzia?. Halaz ere, fede gogorreko norbait konbentzitze-

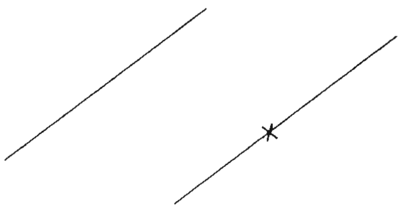
ko segituan jartzen zen dibujo bat.



Geometriaren deskripzio hau eredu imitagarria bihurtu zen, harez geroztik, zientzia izateko asmoa zuketen beste teoria guztientzat. Eta eredu honen argia eta hospe dizdiragarria mendeetan zehar zabaldu zen; Erdi Haroan eta Pizkunde garaian ere metodo euklidear hau Matematikaren metodo propio bezala ikusten zen eta garai hartako matematikari batentzat bata bestetik bereiztea ezinezkoa gertatzen zen. Descartes-ek berak filosofia osoa eraiki nahiko du "more geometrico" honen arabera eta bere "cogito, ergo sum" aforismo famatuak Euklidesen axioma baten ebidentzi klase berdina eskatzen du: nonbait axioma horren ebidentzia intuitiboa ongi finkatuz gero posible litzateke "more geometrico" delako bidea segituz filosofia osoa deribatzea.

Izan ere, metodo euklidearrak (bestalde metodo borobilaren paradigma zenak) bazuen puntu beltz bat: bere boskarren axioma alegia.

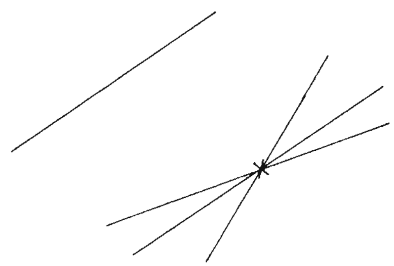
5.axioma horrek zera esaten zuen: zuzen batetik kanpora dagoen puntu batetik zuzen paralelo bakarra dibuja daitekeela lehen zuzenarekiko.



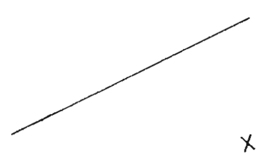
Matematikari askoren ustean, Euklidesen 5.axioma hau ez zen derrigorrezkoa geometriaren deribazio deduktiboa osoa egin ahal izateko.Eritzi hori defenditzen zutenek axioma hori beste laurak erabiliz froga zitekeela zioten eta,esatez gainera,bide horretan barrena saiatu ere ziren.Halaz ere,froga hori bilatzeko egin ziren ahalegin guztiak alferrak gertatu ziren eta,denbora aurrera zihoan heinean,Matematikaren problema klasiko bihurtu zen.

Auzi hau konpontzeko lehen saio emankorrak XVIII mendean aurkitzen dira: mende honetan jaiotzen den korronte bati esker posible izango da XIX mendean problemaren muina' sakon aztertzea eta soluziobideak proposatzea.XVIII mende honetan geometria ez-euklidearrak sortu ziren eta beraiekin batera Geometria eta Matematika osoa ulertzeko modu berri baten posibilitatea.Gauss (1.777-1.855),Bolyai(1.802-1.856), Lobachevsky(1.792-1.856) eta Riemann(1.826-1.866) izango dira eraberritze honen eragileak.

Bolyai eta Lobachevsky matematikariek 5.axioma berri bat proposatu zuten,ondoko hau:kanpoko puntu hortatik dibuja daitekeen paralelo posibleen kopurua bukaezina da.



Riemann-en axioma,berriz,guztiz desberdina da:kanpoko puntu horretatik ez dago paralelo bakar bat ere dibujatzerik.



Matematikari hauen lanaren uzta ederra bezain harrigarria gertatu zen:teorema berri asko sortu eta frogatu arren,ez zuten teoria hauen barruan teorema kontresalerik aurkitu,ez eta beste lau axiomak uka zitzakeenik ere. Hitz gutxitan, alderdi formalari begiatuz gero, teoria berri guztiz kontsistenteen aurrean aurkitzen ziren.

Euklidesen geometriarekin batera beste bi teoria berri eta egoera desohizko bat agertu ziren. Urteen poderioz ongi zimentaturiko jauregi sendoa dardaraz hasten zen; ez da gehiegi pentsatu beharko, honek sortuko zuen aurkako erreakzioa zein gogorra izan zen asmatzeko. Nola liteke horrelakorik gertatzea? Ez al da ba Euklidesen geometria gure espazio fisikoaren geometria? Euklidesen axioma hori ebidentea da!: besteak, berriz esperientziaren autoritatearen kontra daude; non dago, ba, teoria horientzako eredu fisiko egokia?.

Erreakzioa gogorra izan arren, eta ez oso aldekoa noski, funts-funtsean zegoen arazoaren aurrean horrelako komentarioak baino zerbait sakonagoren derrigorrezkotasuna susmatzen zen. Zer da geometria? Zer da, azken batez, teoria matematiko bat?. Erantzuna bideratzeko, zeharo diberjenteak diren ondoko bi opzioetako bat aukeratu behar izan zuten:

a) Teoria matematiko baten funtsa bere axiomen ebidentzia intuitiboan dago, eta metodo deduktiboaren erabilera zuzenean.

b) Teoria matematiko baten benetako justifikazioa metodo deduktiboan bilatu behar da soil-soilik; hortaz, teoria bati teoria matematikoaren izena emateko eskatu beharko zaiona zera da: teoria horren barruan bi teorema kontresalerik frogatzerik ez egotea, eta kito! Horregatik, axiomen aukera garrantzi gabeko gauza da teoriarako.

Historian zehar a) erantzuna izan da erantzun klasikoa, baina geometria berri hauen kasuan oso zaila gertatzen zen postura hori mantentzea, gogorra eta aldeko arrazoi funsezko askorik gabea gainera. Diskusio-haro bat irekiko zen horrela Matematikaren alorrean, XIX mende osoa iraungo zuena.

Giro horren barruan, eta Euklidesengandik honaino ekarri dugun hari historiko hori segituz, ulertu beharko dira G. Fregeren ondoko hitz hauek: "Zehaztasun euklidearretik zertxobait urrundu ondoren, Geometria berriro ere zehaztasun horretara bueltatu da, eta oraingo honetan gainditu egin ere nahi du. Aritmetikan, berriz, bere jatorri indiarragatik edo, idea eta prozeduretan arrazoiketa-bide zabalago eta lasaiagoa azaldu da Geometrian baino; Geometriak pentsamendu grekoaren oinatza darama, izan ere".

G.Frege-ren(1.848-1.925) hitz hauek bi modu desberdinetan uler daitezke, irakurketa bikoitzerako bidea eskaintzen dute. Alde batetik orain arte egin duguna; hots, geometriaren zehaztasuna finkatzeko izandako gorabeherak komentatzen duena: "Geometria zehaztasun horretara bueltatu da, eta oraingo honetan gainditu egin ere nahi du" eta bestetik Aritmetikarako ere horrelako azterketa baten beharra erakusten duena: "Aritmetikan, berriz, bere jatorri indiarragatik edo, idea eta prozeduretan arrazoiketa-bide zabalago eta lasaiagoa azaldu da...". Hitz hauetan garai hartako matematikarien artean jaiotzen ari zen kezka mingarri baten seinale erakusgarria dugu. Eta Aritmetikan ere Geometrian gertatu denaren antzeko zerbait suertatuko balitz?; zein da Aritmetikaren oinarria? Geometriak askoz ere teoria borobilagoa zirudien Aritmetika baino; hura zalantzatan badabil, zer gertatuko da Aritmetikarekin? eta zer Algebrarekin?; zeren eta, azken batez, honen sostengu logikoa Aritmetika da.

Geometria ez-euklidearren arazoak Matematika izeneko Jauregi mardul eta sendo horren hegal batean zirrikitu eta arrailadura ugariak ireki bazituen ere, une honetako egoera askoz ere kezkagarriagoa da. Etxe osoan zehar ikusten dira pareta eroriak eta, okerrago dena, zimenduen egoeraz kezkatzeko ere arrazoi funtsezkoak azaltzen ari dira. Orain arte atseden-leku lasaia eta ohoretsua izan dena toki arriskugarri bat bilakatzen ari da. Matematikarien artean bi talde nabarmentzen dira: batetik azkar asko toki seguruago baten bila alde egiten dutenak; eta bestetik, etxe hori maite dutelako, bakarrik laga baino areago berarekin batera azkeneraino iraun nahiko dutenak.

Ekar ditzagun berriro G.Frege-ren hitzak: "Matematikari gehienek ez dute galdera hauentzat (zenbakia zer den, Aritmetika zertan oinarritzen den...) erantzunik izango. Ez al da lotsagarria Zientziarako hain oinarrizkoa eta sinplea den elementu (zenbakia) honen aurrean nahaste-egoera honetan bizitzea?". Hitz gogorrak dira, kezka sakon baten erakusle biziak. Etxe horren zimenduetan zegoen fede sendoa galtzen ari da, izurrite bildurgarri baten antzera.

Egoera nahasi honen barruan kokatu behar da G.Cantor(1.845-1.918) matematikariaren lana. Etxe berri baten beharra ikusiz, arkitekto-papera hartuko du eta,bere"Multzo teoria"delako lanaren bidez,gero ko urtetan haziko den egitura oso aren planoak diseinatuko ditu.Ma tematikaren zimenduak <u>multzo</u> ide aren gainean ezarriko dira,Frege -ren antsia asetzeko modua eginez. "Zer da zenbaki bat? galdetzen zuen Frege-k,Cantor-en aurretik galdera honek ez zuen erantzun posiblerik,zenbakiaren idea bera bait zen Matematikaren azken sos tengua."Multzo-teoriak" zenbakia ohorezko toki horretatik kenduko du,bertan(eta bere ordez)multzoa jartzeko.

Geroztik(1.880 urtearen inguruan koka daiteke Multzo-teoriaren jaiotza) eztabaida ugari suertatu dira alor honetan,baina aurkeztu diren alternatibak Mul tzo-teoriaren ukazio-bidea baino areago haren indartze-bideak ger tatu dira.Cantor-ek proposaturiko direkzioan ustegabeko puntu ilunak azaldu dira eta,hasiera bate an nahiko intuitibo eta ulergarria zen teoria formalizatuz eta itxura artifizial batean bilakatuz joan beharrean aurkitu da,kon traesanaren aginkada pozointsutik alde egin ahal izateko.Bakoitzari berea emanez,gaur eguneko Matematikaren esplikazio koherenteena Multzo-teoriatik igarotzen dela baieztatu beharreko gauza da.

Matematika berriaren auzi hau oso zaharra da.Pitagorikoen Mate matika kalkulu aritmetikoen erre gela praktikoen bilduma hutsa ikusten zutenentzat berria zen;eta zenbat aurre-pitagoriko ez daude oraindik ere gure artean?.Euklidesen goemetria berria ere,horre lako zehaztasun zorrotzaren beha rra somatzen ez zutenentzat.Geometria ez-euklidearren pretentsi oa ere guztiz zen berria bere ga raian(eta gurean ere bai);gauzak "naturalki" ez ikusteko kutizi bitxia nonbait.Cantor-en Multzo--teoria Matematika berriaren pa radigma da gure artean,baina dimentsio historiko batetik begira tuz gero lokarri luze baten azken katenbegia besterik ez da.

Matematika berriaren auzi hau oso zaharra eta trajikoa da;eta azken kalifikatibo hau ez da modu literario batean ulertu behar ez horixe!.

Pitagorikoen projektu osoa zenbaki irrazionalen jarraikian ito zen,oraindik jaioberria baizik etzenean.Euklidesen zorrozta sun guztia hondoratu egingo da bestalde,nahiz eta paradojikoa izan,intuizioaren traizioagatik. Geometria ez-euklidearren asmoak eta Cantor-en ilusioak ere formalismoaren eremu zurrunera eramango dute matematika osoa,eta, azken batez,formalismoa bera ere estuegia gertatuko da Arıtmetika ren beharretarako.

Horrelako maila bakoitzak aurreko guztien gainezkatzaile gisa errebindikatuko du lau haizetara bere burua;baina bere sabelean han gordeko du,beti ere, birjaiotzen den kontraesanaren suge gorria.Itolarrian,gorago joateko gogoa berpiztuko da,beste maila berri batera,eta azken batez erdibitze luze eta gogor baten bukaeran irtenbide berri eta miragarria jaiotzen denean haurberria heriotzaren seinalea eramango berarekin batera.Sorginzulo latza,Dedalo-ren labirinto mitikoaren irudi borobila.

Dena dela,prozesu honetan ez dago atzera jotzerik,maila bakoitzak bestea desagertarazi egiten bait du eta alferrikako nahia litzateke paradisu galduaren oroitzapenean berriro hartara bueltatu nahi izatea:toki hartan ez genuke ezertxo ere aurkituko.

Hasiera batean tentazio pedagokioan ez erortzeko berebiziko esfortzua egingo nuela esan dut, eta bete ere horrelaxe bete uste dut.Halaz ere,bukaera gisa horra hor zenbait galdera:posıble al da gaur eguneko irakaskuntzan aurre-euklidearra izatea?posible al da gaur eguneko irakaskuntzan aurre-Cantortarra izatea? Zuek erantzun !