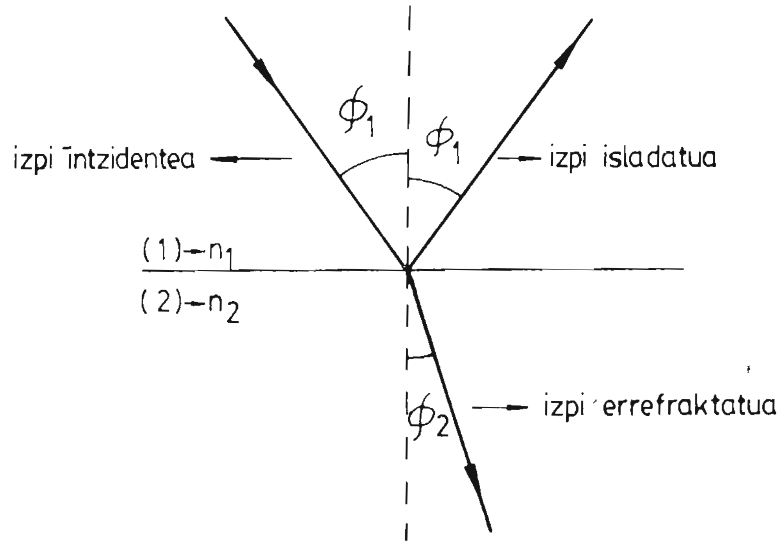
IZPI INTZIDENTEAK, ISLADATUAK ETA ERREFRAKTATUAK BETE BEHAR DITUZTEN ZENBAIT PROPIETATE

(1) eta (2) bi ingurune ezberdin baditugu gainazal laun baten bidez bereiztuak, jeneralean izpi intzidente batek izpi isladatu bat eta izpi errefraktatu bat emango dizkigu.



1. IRUDIA

Izpi horiek bete behar dituzten propietate ezagunenak honako hauek dira:

a) Izpi intzidentea, isladatua eta errefraktatua plano berdinean daude eta plano hori gainazal launaren elkartzuta da. "Intzidentzi planoa" deritzo.

b) Izpi intzidentearen eta normalaren arteko angelua eta beronek izpi isladatuarekin duena berdinak dira.

c) Izpi errefraktatuaren eta normalaren arteko angeluari Φ_2 esaten badiogu, erlazio hau beteko du:

$$\frac{\sin \Phi_1}{\sin \Phi_2} = \frac{n_2}{n_1}$$ "Snell-en legea"

Ekuazio honetan:

Φ_1 = Izpi intzidentearen eta normalaren arteko angelua.

n_1 = Lehengo ingurunearen errefrakzio-indizea.

n_2 = Bigarren ingurunearen errefrakzio-indizea.

Propietate horiek alde batera utzita, beste hiru propietate ikusi nahi ditugu:

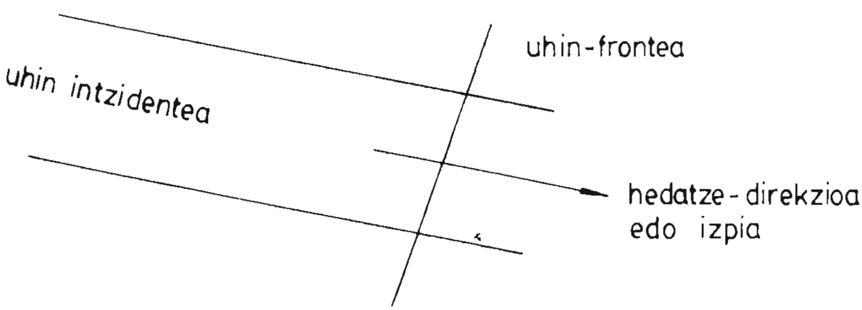
1) A eta B bi puntu ingurune berdinean baditugu, beraiek lotzen dituzten ibilbide guztietatik bide optiko txikiena duenak isladatze-legea beteko du.

2) A eta B bi puntu ingurune ezberdinetan baditugu, biak lotzen dituzten ibilbide guztietatik bide optiko txikiena duenak errefrakzioaren legea beteko du.

3) Bi ingurune bereizten dituen gainazal launean izpi intzidente eta isladatuak fase berdina ala ezberdina eduki dezakete.

Aurretik, uhin-ereduan zera jakin behar dugu: uhin-fronte bat eta izpi bat zer den. Uhin launarekin egingo dugu lan.

Uhin launak: Uhinen hedatzea direkzio batean izaten da, eta uhin-frontea plano horrekin elkartzuta gertatzen da. Uhin-ereduan izpia eta hedatze-direkzioa berdinak dira.

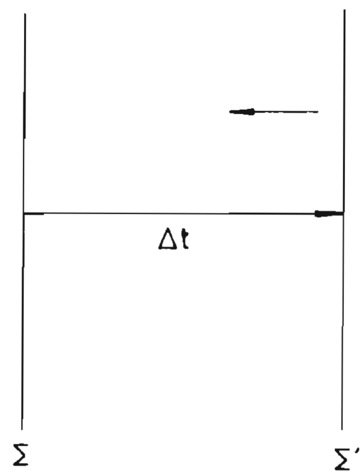


2. IRUDIA

Lehenengo bi propietate horiek ikusteko hiru printzipio eman behar ditugu:

a) Bide optikoen itzulgarritasunaren printzipioa:

"Une batean uhin-fronte bat posizio batean baldin badugu (adibidez), denbora Δt neurrian aldatuz gero uhin-frontea ϵ'-ra aldatuko da. Orain, hedatze-direkzioa alderanztuz gero, eta denbora Δt berdinean aldatuz gero, uhin-frontea ϵ'-tik ϵ-ra pasako da.



3. IRUDIA

b) Bide optikoaren printzipioa:

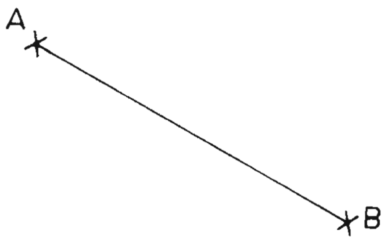
"Bi uhin-fronte lotzen dituzten izpi guztiek bide optiko berdina dute."

Hau da: (A, B) bi puntu marra zuzen batez lotuak baditugu, bide optikoa zera izango da definizioz:

$$l = n \cdot \overline{AB}$$

n errefrakzio-indizea da, eta

$\overline{AB}$ $\vec{AB}$ bektorearen luzera izango litzateke



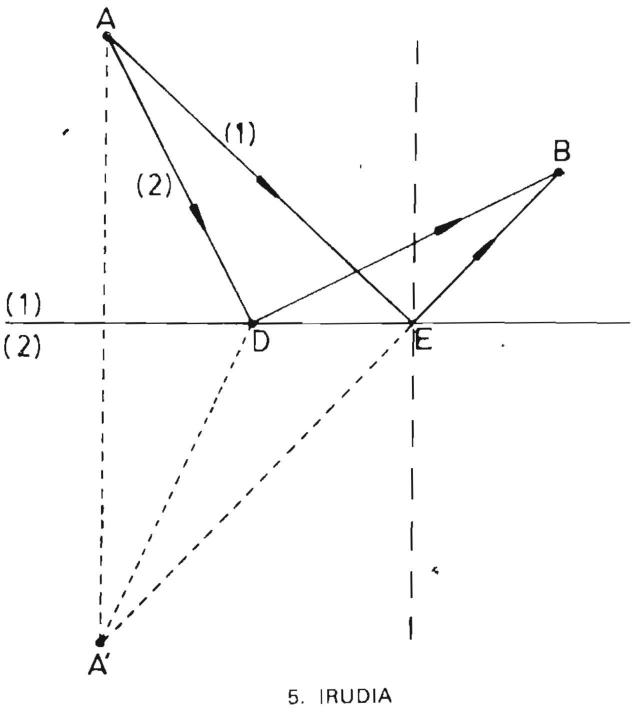
4. IRUDIA

c) Fermat-en printzipioa:

"Argia, puntu batetik bestera joateko, denbora gutxiena behar duen ibilbidetik joango da, edo bide optiko txikiena duen ibilbidetik."

Hiru printzipio horiek ikusita, *lehenengo propietatea betetzen ote den ikusi nahi dugu.*

Horretarako, suposa dezagun gainazal laun batek (1) eta (2) bi ingurune ezberdin bereizten dituela.



5. IRUDIA

A eta B puntuak ingurune berdinean daude eta irudian ikusten dugun bezala (1) eta (2) ibilbideek bi puntu horiek lotzen dituzte.

(1) ibilbidea A-tik B-ra doa eta F puntuan isladatzen da.

(2) ibilbidea A-tik B-raino doan beste edozein ibilbide izango litzateke.

Izan bedi n_1 lehengo ingurunearen errefrakzio-indizea, eta n_2 bigarren ingurunearen errefrakzio-indizea.

Lehen ibilbidearen bide optikoa definizioz zera izango da:

$$l_1 = n_1 \cdot \overline{\Delta E} + n_1 \cdot \overline{EB} = n_1 (\overline{\Delta E} + \overline{EB})$$

Bigarren ibilbidearen bide optikoa honako hau izango da:

$$l_2 = n_1 \overline{\Delta D} + n_1 \cdot \overline{DB} = n_1 (\overline{\Delta D} + \overline{DB})$$

Isladatzearen propietate batengatik, izpi isladatua luzatzen badugu badakigu A' puntutik pasako dela eta gainera A eta A' gainazal horrekiko simetrikoak direla.

Horregatik, geometriaz:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\Delta D} = \overline{\Delta' D} \\ \overline{\Delta E} = \overline{\Delta' E} \end{array}\right\} (\alpha)$$

Beste aldetik, $\Delta' DB$ triangeluan alde bat beste bien batura baino txikiagoa denez:

$$\overline{\Delta' B} < \overline{\Delta' D} + \overline{DB}$$

eta:

$$\overline{\Delta' B} = \overline{\Delta' E} + \overline{EB} \Longrightarrow \overline{\Delta' E} + \overline{EB} < \overline{\Delta' D} + \overline{DB}$$

(α) kontuan hartzen badugu zera gelditzen zaigu:

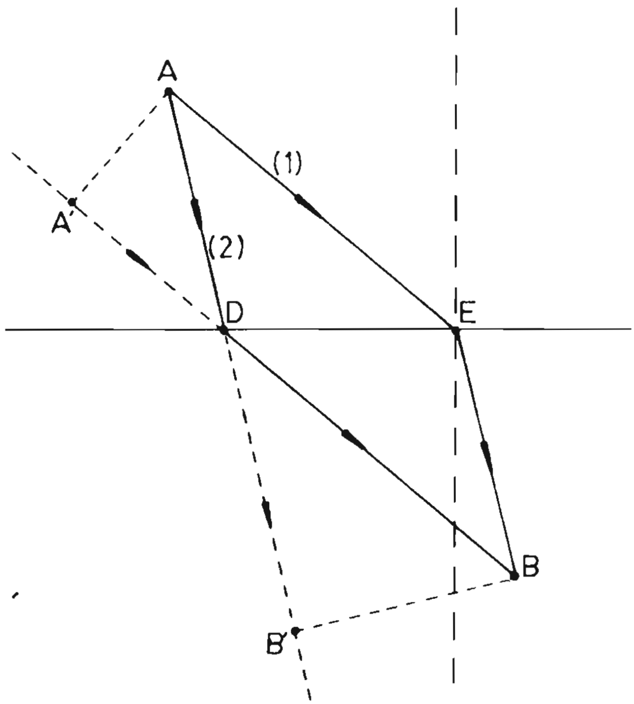
$$\overline{\Delta E} + \overline{EB} < \overline{\Delta D} + \overline{DB}$$

$$n_1 (\overline{\Delta E} + \overline{EB}) < n_1 (\overline{\Delta D} + \overline{DB}) \Longrightarrow \boxed{l_1 < l_2}$$

frogatu nahi zen bezala.

Bigarren propietatea betetzen ote den ikusi nahi dugu:

Horretarako, lehen bezala, suposa dezagun gainazal laun batek (1) (2) bi ingurune ezberdin bereizten dituela. Orain A eta B puntuak ingurune ezberdinean daude, eta irudian ikusten dugun bezala (1) eta (2) bi ibilbideek lotzen dituzte bi puntu horiek.



6. IRUDIA

(1) ibilbidea A-tik B-ra doa eta E puntuan errefraktatzen da.

(2) ibilbidea zera izango litzateke, A-tik B-raino doan beste edozein ibilbide.

Izan bedi n_1 lehenengo ingurunearen errefrakzio-indizea, eta n_2 bigarren ingurunearen errefrakzio-indizea.

Lehen ibilbidearen bide optikoa zera izango da:

$$l_1 = n_1 \cdot \overline{AE} + n_2 \, \overline{EB}$$

Bigarren ibilbidearen bide optikoa, aldiz honako hau izango da:

$$l_2 = n_1 \cdot \overline{AD} + n_2 \overline{DB}$$

D puntutik bi izpi bidaliko ditugu, bata AE -rekiko paraleloa eta bestea EB-rekiko paraleloa.

A-tik uhin intzidentearen frontea dibujatuko dugu: lehen marraztutako zuzena A'-n moztuko du.

Badakigu uhin-fronteak perpendikularra izan behar duela $\overline{AE}$ eta $\overline{A'D}$ bi izpi horrekiko.

B-tik uhin errefraktatuaren frontea dibujatuko dugu, eta lehen marraztutako zuzena B'puntuak moztuko du.

"Bide optikoaren printzipiotik", $\overline{AA'}$ eta $\overline{BB'}$ uhin-fronteak direnez, zera dugu:

"Bi uhin-fronte horiek lotzen dituzten izpi guztiek bide optiko berdina izango dute."

Horregatik ℓ_1 zera izango da orobat:

$$\ell_1 = n_1 \cdot \overline{A'D} + n_2 \overline{DB'}$$

Begira ditzagun triangelu hauek: $\overset{\triangle}{A'DA}$ eta $\overset{\triangle}{DBB'}$ beraz,

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A'D} < \overline{AD} \\ \overline{DB'} < \overline{DB} \end{array}\right\} \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} n_1 \overline{A'D} < n_1 \overline{AD} \\ n_2 \overline{DB'} \quad n_2 \overline{DB} \end{array}$$

bi ezberdintasun horien batura eginez gero zera gelditzen zaigu:

$$n_1 \cdot \overline{A'D} + n_2 \overline{DB'} < n_1 \cdot \overline{AD} + n_2 \overline{DB} \Longrightarrow \boxed{\ell_1 \ \ell_2}$$

frogatu nahi zen bezala.

Hirugarren propietatea aurkitzeko

Aurretik zera jakin behar dugu: uhin laun bat nola adierazi matematikoki.

Guk uhin laun sinuisoidal baten asaldura ekuazio honen bidez matematikoki adieraziko dugu.

$$E = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right]$$

x positiboen direkzioan hedatzen bada, eta

$$E = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \varphi \right]$$

x negatiboen direkzioan hedatzen bada.

A, ω eta φ iturriaren konstanteak dira.

A: uhinaren anplitudea.

ω: frekuentzia angeluarra:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(T: periodoa)}$$

$\frac{-\omega x}{v} + \varphi$ adierazpenari, uhinaren fasea deritzo.

v: uhinaren hedatze-abiadura izango litzateke.

Lehen esan dugun bezala uhin-ereduan izpia eta hedatze-direkzioa berdinak dira. Horregatik, irudian, uhin intzidentea, isladatua eta errefraktatua dibujatu beharrean izpiak dibujatuko ditugu.

Beti bezala gainazal laun bat dugu (1) eta (2) bi ingurune ezberdin bereizten dituena.

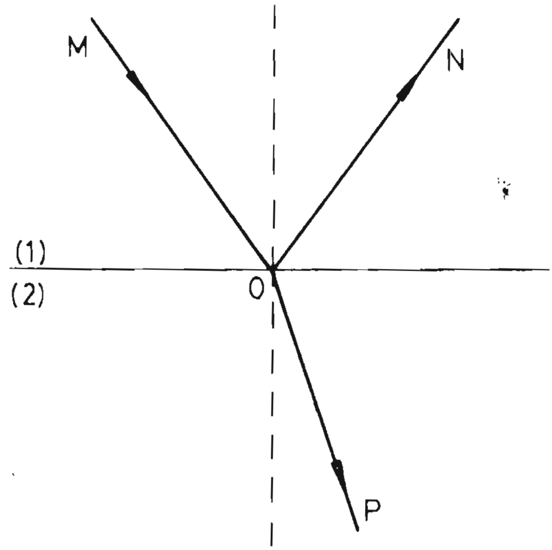
Izan bedi:

n_1: lehenengo ingurunearen errefrakzio-indizea eta

v_1: hedatze-abiadura ingurune horretan

n_2: bigarren ingurunearen errefrakzio-indizea eta

v_2: hedatze-abiadura ingurune horretan



7. IRUDIA

Bedi:

x_m: izpi intzidentearen direkzioan O-raino dagoen distantzia.

x_n : berdin izpi isladatuan.

x_p : berdin izpi errefraktatuan.

Suposa dezagun uhin intzidentearen anplitudea A dela.

Izpi intzidentearen asalduraren balorea izango litzateke.

$$E_{\overrightarrow{MO}} = A \cdot \cos\left[\omega\left(t\ ?\ \frac{x_m}{v_1}\right)\right]$$

$\varphi = 0$ dela suposatzen badugu.

Adierazpen horren zeinuan problema izan genezake. Honetaz erabaki hau onartzen da.

Izpia O puntuan badoa, x negatiboen direkzioan hedatzen bada bezalaxe da, eta orduan zeinu positiboa ipiniko dugu (+).

Izpiak O puntutik alde egiten badu, aldiz, positiboen direkzioan hedatzen bada bezala da, eta orduan zeinu negatiboa ipiniko dugu (—).

Hau dela eta kasuan:

$$\boxed{E_{\overrightarrow{MO}} = A \cos\left[\omega\left(t + \frac{x_m}{v_1}\right)\right]}$$

Defini ditzagun ρ eta τ koefizienteak:

$$\rho = \frac{\text{A ISLADATUA}}{\text{A INTZIDENTEA}}$$

$$\tau = \frac{\text{A ERREFRAKTATUA}}{\text{A INTZIDENTEA}}$$

(1) eta (2) bi ingurune bereizten dituen mugan.

Orduan ΔISLADATUA $= \rho \cdot \Delta$ izango litzateke eta
ΔERREFRAKTATUA $= \tau \cdot \Delta$

Definizio hauetatik (1) eta (2) inguruneak bereizten dituen mugan:

$\rho > 0$ bada, ez dago fase-aldaketarik
$\rho < 0$ bada, fasea aldatzen da
$\tau > 0$ bada, ez dago fase-aldaketarik
$\tau < 0$ bada, fasea aldatzen da

Hori dena kontuan hartuta:

$$\boxed{E_{\overrightarrow{ON}} = \rho \cdot A \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{x_n}{v_1}\right)\right]}$$

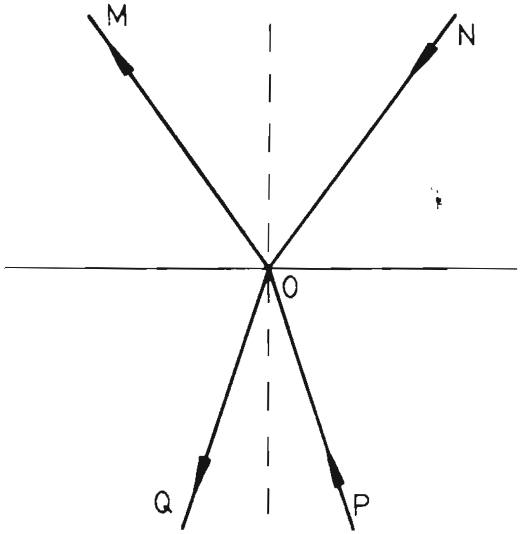
(—) ipini dugu $\overrightarrow{ON}$ izpia O-tik alde egiten duelako.

$$E_{\overrightarrow{OP}} = \tau \cdot A \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{x_p}{v_2}\right)\right]$$

Orain v_2 ipini dugu, $\overline{OP}$ izpia bigarren ingurunean hedatzen delako.

Izpi isladatua eta errefraktatua inbertitu egiten ditugu.

Orduan izpi isladatua inbertitua $\overrightarrow{NO}$ emango digu izpi isladatu bat $\overrightarrow{OM}$ direkzioan eta izpi errefraktatu bat $\overrightarrow{OQ}$ direkzioan.



8. IRUDIA

Izpi horien asaldurak horrako horiek izango dira:

$$\boxed{E'_{\overrightarrow{OM}} = \rho \cdot A \cdot \cos\left[\omega\left(t + \frac{x_n}{v_1}\right)\right]}$$

(+) izpia O puntura doalako.

$$\boxed{E'_{\overrightarrow{OM}} = \rho^2 \cdot A \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{x_m}{v_1}\right)\right]}$$

izpi honen anplitudea kalkulatzeko badakigu:

$$\rho = \frac{\Delta \text{ ISLADATUA}}{\Delta \text{ INTZIDENTEA}} \qquad \text{eta orain } \Delta \text{ INTZIDENTEA} = \rho \cdot \Delta$$

horregatik

$$\boxed{\Delta \text{ ISLADATUA} = \rho^2}$$

$$\boxed{E'_{\overrightarrow{OQ}} = \rho\tau\Delta \cos\left[\omega\left(t - \frac{x_q}{v_2}\right)\right]}$$

izpi honen anplitudea kalkulatzeko:

$$\tau = \frac{\Delta \text{ ERREFRAKTATUA}}{\Delta \text{ INTZIDENTEA}}$$

lehen bezala Δ INTZIDENTEA $= \rho \cdot \Delta$, eta horregatik

$$\boxed{\Delta \text{ ERREFRAKTATUA} = \rho\tau\Delta}$$

Berdin izpi errefraktatua inbertitua $\overrightarrow{PO}$ emango digu, eta orobat izpi isladatu bat $\overrightarrow{OQ}$ direkzioan eta izpi errefraktatu bat $\overrightarrow{OM}$ direkzioan.

Izpi horien asaldurak kalkulatu baino lehen ρ' eta τ' bi koefiziente defini ditzagun

$$\rho' = \frac{\Delta \text{ ISLADATUA}}{\Delta \text{ INTZIDENTEA}}$$

$$\tau' = \frac{\Delta \text{ ERREFRAKTATUA}}{\Delta \text{ INTZIDENTEA}}$$

(2) eta (1) bi ingurune bereizten dituen mugan

$$\boxed{E''_{\overrightarrow{PO}} = \tau\Delta \cdot \cos\left[\omega\left(t + \frac{x_p}{v_2}\right)\right]}$$

$$\boxed{E''_{\overrightarrow{OM}} = \tau\tau'\Delta \cos\left[\omega\left(t - \frac{x_m}{v_1}\right)\right]}$$

izpi honen anplitudea kalkulatzeko:

$$\tau' = \frac{\Delta \text{ ERREFRAKTATUA}}{\Delta \text{ INTZIDENTEA}}$$

Kasu honetan: Δ INTZIDENTEA $= \tau\Delta$