

IKERKETA MATEMATIKOA O.H.O.-eko IRAKASKUNTZAN

Ikerketa matematikoak oso gauza serioa dirudi adin horretako neska-mutikoen indar matematiko ahulentzat, beldugarria. Egia da, bestetik, ikerketa txikia, erregela simple batzuren bilaketa alegia, askotan egin izan dugun gauza dela; baina askoz ere urrutirago joan zitekeenik ez genuen uste. Oso zaila egiten zitzaigun gai egoki bat bilatzea, eta aspaldian utzia, ahaztua genuen gai hau.

Horregatik, harriduraz hasiera batean eta gogo betez geroxeago irakurri nuen "Mathematics teaching" aldizkariaren 85. zenbakian (december 78) azaltzen den Bob Jeffery-ren artikulua bat. Bertatik jaso ditut nik hemen azaltzen diren ideia gehienak, bertatik ere geroxeago egingo dudan aportazio motzerako sujerentzia. Artikulua izenburua "Happy numbers, sad numbers" (zenbaki zoriontsuak, zenbaki tristeak) da.

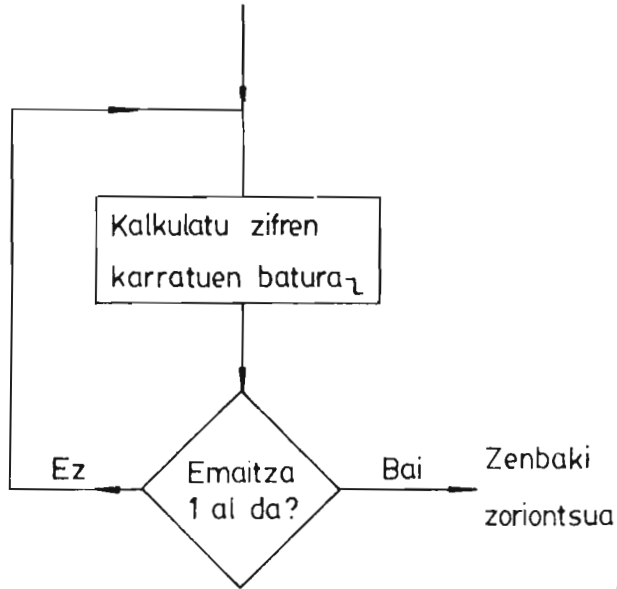
Has gaitezen, denbora alferrik xahutu gabe, direlako "zenbaki zoriontsu" horien definizioan.

Zenbaki bat zoriontsua da baldin eta bere zifren karratuen arteko batura 1 edo beste zenbaki zoriontsua bada.

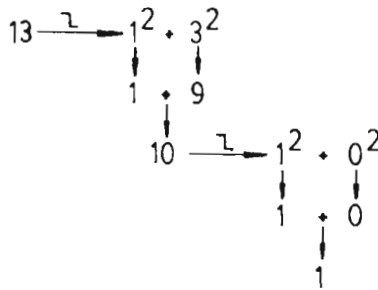
Adibidea:

Har dezagun 13 zenbakia.

Ikurraren bidez zifren karratuen arteko batura adierazten da.



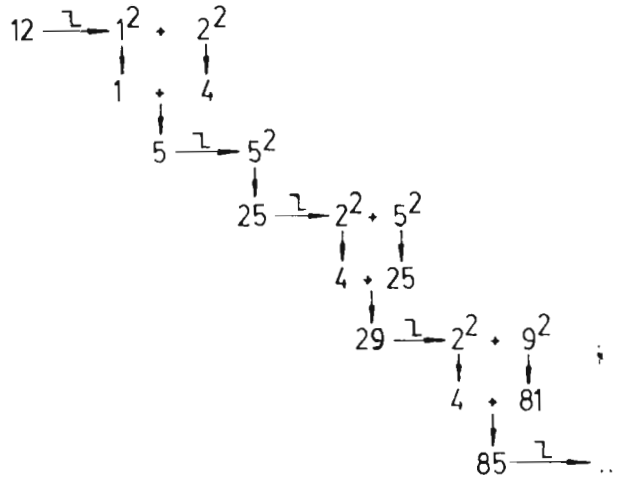
1. IRUDIA



2. IRUDIA

zeinek esango luke zenbaki hau zoriontsua izan litekeenik, duen fama txarra ezagutuz gero?

eta 12 zenbakia? itxuraz behintzat alaiagoa da; ikus dezagun zer gertatzen den.



3. IRUDIA

Noiz arte honela? horrelako bideak ba ote du bukaerarik? Galdera asko, baina galderak beti ikerketaren iturburua dira; galdera kilikagarriak dira, zirikagarriak, irteera bilatzeko gogoaren piztaileak.

Begira zer dion une honetan John Hawkins-ek, boskarren mailako ikasleak:

The investigation I chose was to find out what happens when you choose any numbers, square the digits of that number, and then add the squares together to get the next number and do the above to chat to get the chain of the chosen number.

Example; $25 \rightarrow 2^2 + 5^2 \rightarrow 4 + 25 \rightarrow 29 \rightarrow 2^2 + 9^2 \rightarrow 4 + 81 \rightarrow 85\dots$

So the first three numbers in this particular chain are $25 \rightarrow 29 \rightarrow 85$.

(Aukeratu dudan ikerketa-bidea zera izan da: ikustea ea zer gertatzen den zenbaki baten zifra edo digituen karratuen batura lortu ondoren eta lortu den zenbaki honi lege berdina aplikatzean lortzen dena eta abar... Modu honetan jokatuz "zenbaki-katea" bat lortzen da, eta katea horren sorburua aukeratutako zenbakian dago.

Adibidea: $25 \rightarrow 2^2 + 5^2 \rightarrow 4 + 25 \rightarrow 29 \rightarrow 2^2 + 9^2 \rightarrow 4 + 81 \rightarrow 85\dots$

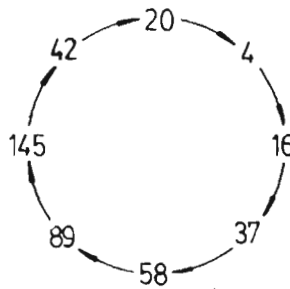
Beraz, katea partikular honen lehenengo hiru zenbakiak zerak dira: $25 \rightarrow 29 \rightarrow 85$.)

Itxuraz dirudiena baino zerbait sakonagoa da hemen ematen den pausoa. Bidearen lehenengo pauso logikoa eman dugu; zenbaki zoriontsuaren definizioaz baliaturik elementu berri bat sortu da, "katea" elementua hain zuzen.

Hemendik aurrera galdera berriekin topo egin beharko dugu, hara nola: nola-koak dira katea hauek? bukaerarik ba al dute? gorakorrak al dira? Interesgu-nea desplazatu egin da, bidexka batean sarturik gaude; irteeraraino eramango gaituen edo bide itsua den jakiteko aukera azkar izango dugu: segi deza- gun...

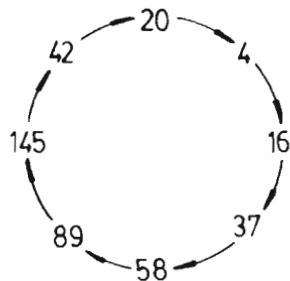
Gatozen berriro John izeneko ikasle honen gogoetara:

To start off with I went through the single digit numbers 1-9 to find out what chains they formed. I found out that all of the chains either went down to the number 1 or went into a cycle of eight numbers. This ring is continuous and can be jointed at any point. The eight numbers are:



4. IRUDIA

(Lan honekin hasteko zifra bateko lehenengo bederatzi (1-9) zenbakiak hartu nituen, zer-nolako kateak sortzen ziren ikusi ahal izateko. Ikusi izan dudanez, edo eta 1 zenbakiraino ailegatzen ziren edo bederatzi zenbaki zituen ziklo batean erortzen, salbuespenik gabe. Eraztun edo sorgin-zulo hau jarraia da eta bertako edozein puntutatik sartzen da. Hona hemen sorgin-zulo horren zenbakiak:)



5. IRUDIA

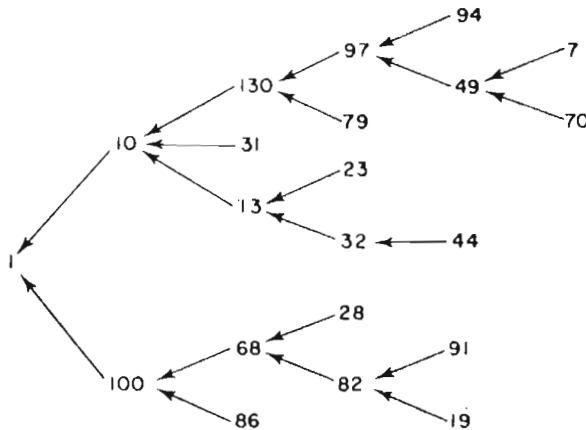
Hona hemen bigarren pausoa; kateen egitura aztertzen hasi garenean gure begien aurrean bi bide ireki dira: 1-eraino eramaten duena, zoriontasunerainokoa; eta sorgin-zulo bukaezin batera bultzatzen gaituena. Proposamendu edo galdera berri bat egiteko aukeran gaude, ondorengo hau hain zuzen:

Ehun baino txikiagoak diren zenbakiekin ere gauza bera gertatzen da; zoriontsuak dira edo sorgin-zulo batean erortzen dira.

Zoriona nekatuaren zai omen dago bidearen bukaeran, helburura ailegatzean dena omen da atsegin eta zorion; beste batzuentzat zoriona bidean dago, baina hori beste leloa da... Gure kasu honetan 1 zenbakiaren bila gabiltza, eta horrelako bide neketsuaren bukaera alaikiro hartzen da, dudarik gabe. Horren bukaera zoriontsua ez dutenei "zenbaki tristeak" esaten zaie, baldin eta bukaera dutenik eta bukaera hori 1 zenbakiaren desberdina denik frogatzeko modurik aurkitzen bada, noski.

Horra hor gakoa! Horra hor ikerketarako gai aproposa! Nola frogatu zenbaki bat ez dela inoiz helduko 1 zenbakiraino?

Aurrera segitu baino lehenago egin dezagun komentario labur bat. Horrelako gaiak oso egokiak dira adin honetako neska-mutikoentzat: egokiak, matematikaren aurpegi inдукtiboan lantzen laguntzen dutelako. Jakina denez, neke handiz lortzen dute adin honetako neska-mutilek arrazoiketaren katea deduktiboak menperatzea eta segitzea (11, 12, 13 urteko ikasleek ari gara), baina gustora iharduten dute lege matematiko berrien bila. Arrazoia oso sinplea da: bide inдукtiboan ondo menperatzen dute eta bertan beren buruak gustora sentitzen. Oso ideia ona beraz, artikulu honen egileak izan duena; oso egokia, benetan aproposa gure klaseak aberasteko eta bide honetan inoiz saiatu ez bagara ere aukera bikaina.



6. IRUDIA

Goian aipatutako proposamenduaren frogan saiatzen da Bob Jeffery delako artikulu horretan; saiatu eta lortu, ondorengo lerro hauetan ikusiko den bezala.

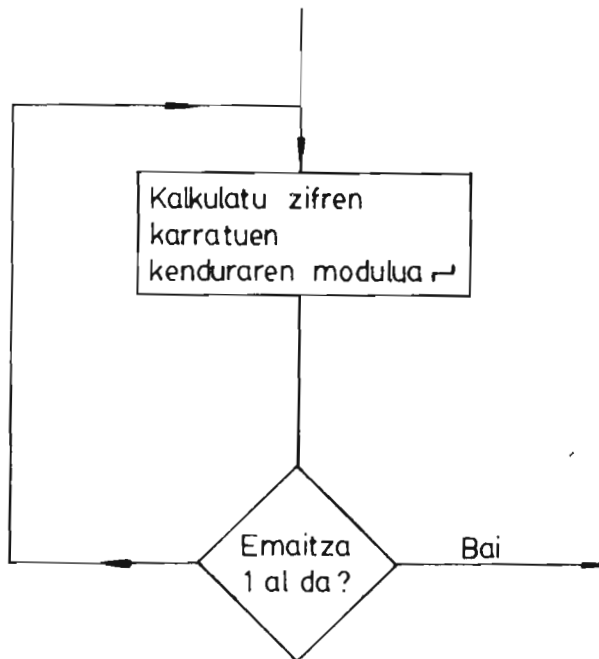
Froga honetan segitzen den bidea bide induktiboa da: zenbaki guztiak hartu eta sortzen dituzten kateak elkartuz denak sorgin-zuloan edo 1 zenbakian erortzen direla ikus araztea.

Hona hemen lan hori egin ondoren aurkitu diren (100 baino txikiagoko) zenbaki zoriontsu guztiak.

Oharra: 100 eta 130 zenbakiak beharrezkoak dira katea hauetan. Nahiz eta guk sorburu bezala ez hartu, geroko kalkuluan azaltzen dira.

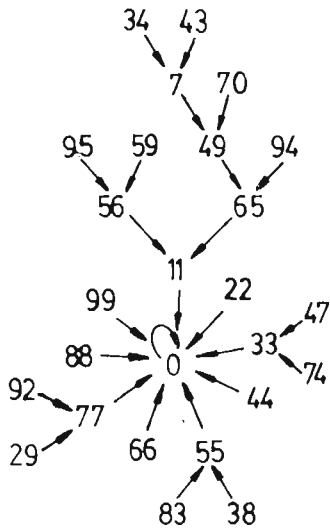
Hemen, berriz, zenbaki tristen multzo negargarria ikus daiteke: goian ez dauden zenbaki guztiak bertan daude. Ikusgarria da, bestetik, sorgin-zuloak sortzen duen erakarpen misteriosoa, ezin bestean zenbaki guztiak motzean ala luzaroan zulo iredle horren ahoan erortzen direlarik.

Bukatu egin da hasia genuen bidea, galdera guztien erantzuna zirimola bortitz horretan ahitzen da. Halaz ere, bukaera bera beste abentura baten

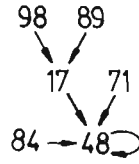


8. IRUDIA

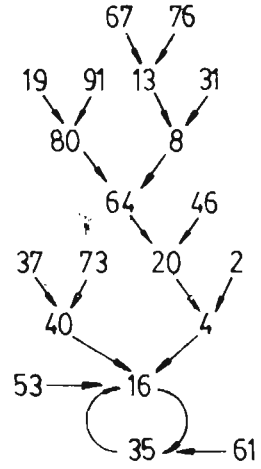
Zenbaki tristeak



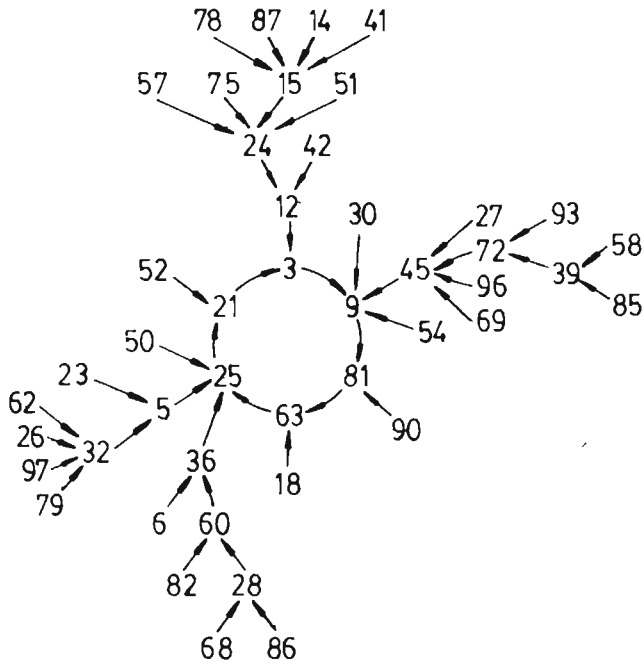
10. IRUDIA



11. IRUDIA



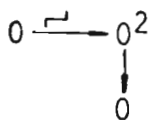
12. IRUDIA



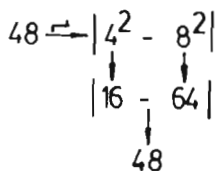
13. IRUDIA

Espero ez genuen sorpresa ederra hartu dugu: bi sorgin-zulo eta bi hobi aurkitu ditugu.

Hobiak: 0 eta 48 dira



14. IRUDIA



15. IRUDIA

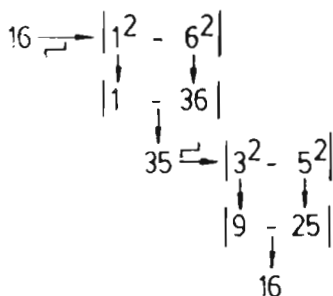
48 zenbakia oso berezia da, bere buruan transformatzen bait da etengabe, narzisimo errugabe batean: poesia apur batez inspiraturik narziso-zenbaki izena emango genioke. Barkatu zuek ere nere narzisismo hau; beste sorgin-zulo bat?

Zorgin-zuloak:

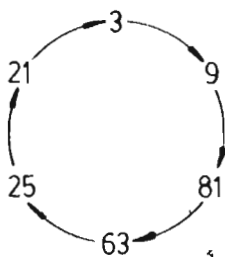
Txiki bat:



16. IRUDIA



17. IRUDIA



18. IRUDIA

ez dugu sorgin-zulo honen kalkulua erakutsiko, luzea baita eta ez du ezer berririk ekartzen.

Oso lan interesgarria izan da guretzat gaurkoan egindako hau: Benetako harrobi bikaina aurkitu da ikerketa matematikoa gureganatzeko eta neska-mutiko gazteen eskuetan jartzeko. Adibide bezala, ondorengo ikerketa hau proposa daiteke: zenbaki bat "gardena" da, baldin eta bere zifren karratuen arteko kenduraren modulua zeroa edo beste zenbaki gardena bada.

Ikasleek ez dakite zenbaki batzuk gardenak direla eta beste batzuk sorgin-zuloan eroriko direla, baina hori da bilatu eta lortuko duten emaitza.

Ikusten den bezala, zenbakien mundu hau eta Aliziaren mundu harrigarria lehengusu txikiak dira; baina mundu honetan sartzeko Aliziaren inozentzia behar da. Baina hori zuen eskutan dago, anima zaitzete!

Bukatzeko, eman ditzagun beste bide irekiak ikerketarako; bide hauetako batzuk aipatutako artikulua horretatik hartuak dira.

1.—"All numbers are happy in base 2". What about other bases?

(Zenbaki guztiak zoriontsuak dira biko oinarrian; zer gertatzen da beste oinarrietan?)

2.—Zer gertatzen da zifren karratuen arteko biderkadura egiten bada?

J. M. GOÑI