

# MATERIAREN IZAERA DISKRETUA

## I

### Gasen teoria zinetikoa

Gaur egungo Fisikaren oinarria hauxe dugu: materiaren osagai elementalak; hots, molekulak, atomoak eta zatiki elementalak. Halaz guztiz, eta nahiz orain materiaren atomotasuna denok onartzen dugun, gai hau ez da bistakoa eta gaur daukagun segurtasun horretaraino iristeko urrats batzuk eman behar izan dira.

Materiaren atomotasunaren lehenengo idearen aztarnak gasaren azterteak eman zituen. Lukrezio, K.a. 60. urtean gutxi gora-behera, aireko hautsaren zatikien higidura irregularrez ohartu zen; higidura hori adierazteko zera suposatu zuen: airea zatiki oso txikiz, ikustezinez, osaturik zegoela; zatiki hauen eta hautsaren arteko talkak ziratekeen, hain zuzen, higidura horien irregulartasunaren kausa. Lukrezioek hauxe esan zuen:

“Eguzki-izpitan higitzen ari diren gorputzez gehiago arduratu beharra dago, higidura horrek ezkutuan dagoen eta ikustezina den materiaren higidura inplikatzan bait du. Higidura bere hastapenetatik (atomoetatik) abiatzen da eta arian-arian gure zentzuetaraino iristen da; hori dela eta, eguzki-argiaren izpitan ikus ditzakegun gorputzak benetan higitzen ari dira nahiz eta higidura hori sortzerazten duten talkak ikuskorrak ez izan”.

Hemezortzi mende geroago Brown-ek antzeko higidura batzuk aurkitu zituen. Likido batean dauden zatiki mikroskopikoen higidurak ziren, hain zuzen. Higidura-mota honi “higidura browndarra” esaten zaio orain.

Lukrezioaren idea ez zen berriro erabilia izan 1739. urterarte. Urte honetan, Bernouilli idea horren bidez lege natural bat adierazten saiatu zen. Bernouillik zera suposatu zuen: gas bat zatikiz osaturik zegoela eta zatiki mikroskopiko horiek (molekulak) abiadura konstante batez higitzen zirela. Hori zela eta, presioaren eta abiaduraren arteko erlazio bat atera zuen; honek Boyle-ren legea erakartzen zuen: temperatura batetan, presioax bolumena = konstantea.

Egin dezagun Bernouillik egin zuen arrazoiaketa: l aldeko kubor batetan m masako atomo bat kuboaren aurpegiaren kontra talkatzean zera dugu: goiko aurpegiaren kontra talkatzean abiaduraren osagai bertikala  $v_z$  bada,  $-v_z$  bilakatu da, hots, alderantzizkoa; hori dela eta, kuboaren aurpegiari ematen zaion momentua  $2 m v_z$ -koa da. Gero atomoak beheko aurpegiaren kontra joko du, eta berriz goiko aurpegiara joango da. Goiko aurpegiaren ematen diren bi talken artean dagoen epea  $2 l/v_z$ -koa da ( $v_z$  handia bada, atomoaren pisua dela eta,  $v_z$ -ren dagoen aldakuntza goitik behera eta behetik gora joatean arbuigarria da). Goiko aurpegiaren dagoen batez-beste indarra zera da: segundo batetan ematen zaion momentua, hots:

$$\frac{2 m v_z}{2 l/v_z} = \frac{m v_z^2}{l}$$

Hori dela eta atomo guztiek goiko aurpegiari egiten dioten indarra hauxe da  $M v_z^2/l$ . Hemen: M, kuboan dauden atomo guztien masa da;  $l/v_z^2$ , atomo guztien  $v_z^2$ -ren batez-beste balioa da.

Goiko aurpegiari dagokion presioa, indarra zati azalera izango da; beraz,

$$P = \frac{M v_z^2/l}{V} = \frac{M v_z^2}{l^3} = \frac{M v_z^2}{V}$$

V: kuboaren bolumena izanik.

Baina x, y eta z direkzioak baliokideak direnez gero:

$$\begin{aligned} \overline{v_x^2} &= \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} \\ \overline{v^2} &= \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3 \overline{v_z^2} \end{aligned}$$

edo,

$$\overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

Beraz,

$$PV = \frac{1}{3} M \overline{v^2}$$

Hemen,  $\overline{v^2}$ ,  $v^2$ -ren batez-beste balioa da; balio hau gasaren tenperaturak baldintzatzen du, eta tenperatura batetan konstantea da.

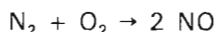
Dalton-en "proportzio anizkoitzen" legea dela eta, materiaren izaera atomikoaren adierazpenaren egokitasuna nabariagoa egin zen. Lege honek zera dio:

"A gai bateko kantitate bat B gai bateko kantitate batekin konbinatzen bada C gai bat emateko, eta B-ko beste kantitate batekin beste D gai bat emateko, B-ko bi kantitateen arteko erlazioa zenbaki oso eta txiki bat da".

Lege honekin oso erlazionatuta dagoen beste lege bat (hots, Gay-Lussac-ena) dugu: "gas desberdin batzuk elkarrekin konbinatzen badira, gas horien bolumenen eta azaltzen den gasaren bolumenaren arteko erlazioak zenbaki oso eta txikiak dira".

Bi lege hauek, batera hartuta, itxuraz zera inplikatzan dute: temperatura eta presio batetan gas-bolumen berdinek atomo-kopuru berdina dutela.

Halaz ere problema zail batek zutik jarraitzen zuen; hemen NO kasuaren bidez agertuko dugu: N-ko bolumen-unitate bat O-ko beste bolumen-unitate batekin konbinatze da; hori dela eta, NO-ko bi bolumen-unitate azaltzen dira. Baina NO-ko molekula bat osatzeko, N-ko atomo bakoitza O-ko beste atomo batekin elkartuko balitz, azalduko litzatekeen NO-ko bolumena bat izango litzateke (ez bi). Hau eta antzeko beste kasu batzuk zirela bide, bolumenen konbinazio-legea duda-mudan jarri zen. Problema honi Avogadro eman zion irtera. Honek, 1811 urtean, zera suposatu zuen: gas desberdin askoren molekula (nitrogenoa eta oxigenoa barne) biatomikoak zirela; orduan, lehen aipatu dugun erreakzioa horrelakoa litzateke.



Avogadro ez zituen bere ideak oso ongi adierazi; askorentzat problema ez zegoen garbiturik nitrogeno desplazaturik baizik: zergatik elkartu behar ziren bi atomo (eta ez hiru, lau edo ehun) molekula bat osatzeko? Hori zela eta, Avogadroren idea ez zen 1860 urterarte onartua izan, eta molekula bat osatzen duen atomo-kopuruaren problemak 1926 urterarte zutik jarraitu zuen; urte honetan, soluzioa teoria kuantiko modernoaren bidez adierazia izan zen.

### **Batezbesteko bide askea**

XIX. mendeko bigarren erdian teoria atomikoak izugarritzko bultzada handia jasan zuen. Hori dela eta, orduraino askatu gabe zegoen zenbait problema adierazirik gelditu zen. Horien arteko bat hauxe zen: gas-molekulak oso arin (hots, abiadura handi batez) higitzen badira, gas bat hedatzen denean zergatik hedatzen da honen mantso? Galdera honen erantzuna molekulen neurriak kontutan hartzean eman zen: gasak, hedatzean, eragozpen bat aurkitzen du: molekulek elkarrekin talka egiten dute, hain zuzen.

Azter ditzagun talka hauek. Horretarako "Batezbesteko bide askea" definitu behar dugu, eta hauxe da: bi talka kontsekutiboren artean molekula batek betetzen duen batezbesteko bidea. Erlaziona dezagun bide hau molekularen "diametroarekin".

Hasteko, molekula baten diametroaren kontzeptua zalantzan ipini behar dugu: molekula bat ez da gorputz trinko bat, pilota baten antzera, eta beraz ez dakigu kontzeptu hau egoki diezaiokegun ala ez. Dena dela, definizio operazional bat eman dezakegu: berdinak diren bi molekulek elkarrekin talka egiten dute beren zentruak d baino txikiagoako distantzia bateraino hurbiltzen dire-

nean. Eta noiz esan dezakegu molekula batek beste baten kontra talka egiten duela? Molekula baten higiduraren direkzioa aldatzen denean.

Idea guzti hauek erabiltzeko zera suposa dezakegu: zulo batetik molekula-korronte bat ateratzen da, molekula guzti hauen ibilbideak paraleloak izanik. Puntu batetan korrontearekiko elkartzuta den xafla bat ipintzen baldin badugu, segundo bakoitzean bere gainean ezartzen den materi kopurua puntu hartatik segundo bakoitzean normalean pasako litzatekeen molekula-kopuruaren araberakoa izango litzateke. Baina xafla zulotik urrundu ahala, xaflaren gainean ezarriko den materia, segundo bakoitzetan noski, eskasagoa izango da. Eskasagotasun honen arrazoa zera da: molekulak xaflaraino joatean aireko molekulekin talkak izaten bait dituzte (Laborategi batetan lor daitekeen "huts" on batek  $10^{10}$  molekula/cm<sup>3</sup> izan dezake).

Kontsidera dezagun aire-xafla mehe bat; bedi A bere azalera eta dx bere lodiera. Izan bitza n molekula/cm<sup>3</sup>. Aireko molekula bakoitzak xaflaren gainean  $\pi \cdot d^2$  azalera bat estaltzen du; hau da, molekula bat bere bidetik desbidatzen da baldin bere zentruak azalera horren kontra talkatzen badu. Aire-xaflaren azalera-unitateari dagokion molekula-kopurua  $n \cdot dx$ -etakoa da. Kontsideratzen dugun dx hori aski txikia bada, bide horretan molekula bat bakarrik izango dugu eta orduan estalita dagoen azalera  $\pi d^2 \cdot ndx$  da;  $n \cdot \pi \cdot d^2 = \alpha$  egiten badugu, airetik pasatzean korrontetik desbideratzen den molekula-kopurua  $\alpha \cdot dx$  izango da.

Zulotik, hau da,  $x = 0$  puntutik  $N_0$  molekula abiatzen badira, x bide bat ibili ondoren, korrontean jarraitzen duen N molekula-kopurua aurkitu behar dugu. dx bidean korrontetik desbidatzen den molekula-kopurua  $N \cdot \alpha \cdot dx$  da, eta beraz zera jar dezakegu:

$$dN = -N \cdot \alpha \cdot dx$$

Integratu ondoren:

$$N = N_0 e^{-\alpha x}$$

Beste hitzez, molekula batek talkarik izan gabe x bide bat betetzeko dadukan probabilitatea  $e^{-\alpha x}$  da.

Batezbesteko bide askearen balioa aurkitzeko bere definizioa erabiltzea aski da: x distantziaren balio posible bakoitzaren eta bide hori bakarrik betetzen duen molekula-kopuruaren arteko biderkaketa egiten badugu, x-ekiko biderkadura horren integrala egin ondoren bide aske osoa aurkituko dugu. Horren emaitza,  $N_0$  molekula guztien arteko zatidura egin ondoren batezbesteko bide askea izango dugu. Molekula batek x distantzia bat, baina ez gehiago betetzeko dadukan probabilitatea hauxe da: talkarik gabe x distantzia bat bete dezanaren probabilitatea, hots,  $e^{-\alpha x}$ , bider urrengo dx-eantalka bat izan dezanaren probabilitatea; hots,  $\alpha \cdot dx$ .

x distantzian desbidatzen den molekula-kopurua  $N_0 e^{-\alpha x} \cdot \alpha \cdot dx$  da. Molekula horiek betetzen duten bide aske osoa  $\int_0^{\infty} N_0 e^{-\alpha x} \cdot \alpha \cdot dx$  da eta beraz  $\lambda$  batezbesteko bide askea hauxe da:

$$\lambda = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} x \cdot N_0 e^{-\alpha x} \cdot \alpha dx = [-x e^{-\alpha x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cdot dx = \frac{1}{\alpha}$$

edo

$$\lambda = \frac{1}{n\pi d^2}$$

$\alpha$  eta  $\lambda$  artean aukitu dugun erlazioa beste bide batez ere lor daiteke, Poisson-en estatistikaren bidez hain zuzen.

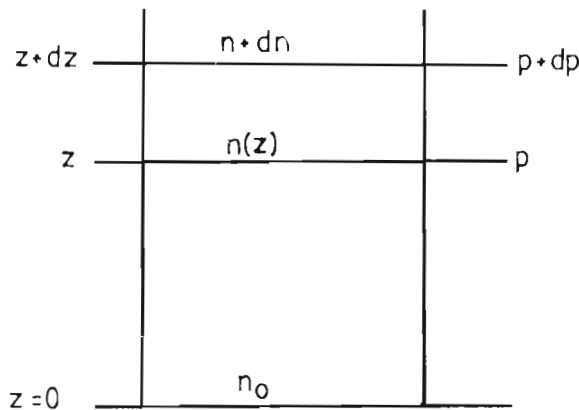
1925. urterarte ez ziren gauza guzti hauek esperimentalki ikusi ahal izan. Urte honetan, Bielz-ek labe batek emititzen zuten zilarrezko atomo-sorta batek xafla baten gainean ezartzen duen zilar-kopurua neurtu zuen. Esperimentu hau presio desberdinetan egin ondoren, zera ikusi zuen:  $\lambda$ -ren balioa presioarekiko alderantziz proportzionala zela; horrela izan behar zuen izan ere, zeren  $s$  (hots, zentimetro kubiko batetan dagoen molekula-kopurua) presioarekiko zuzenki proportzionala bait da.

Hemen egin dugun frogapenean adierazi gabeko suposizio bat egin da, aireko molekulak geldirik daudela; eta hori ez da egia. Aireko molekulak higitzen ari dira. Higidura hau kontutan edukitzekotan frogapena askoz zailagoa egiten da, eta lortzen den emaitza hauxe da:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n\pi d^2}$$

### Maxwell-en abiadura-banaketa

Maxwell-ek, bere abiadura-banaketaren bidez, teoria atomikoaren ulerpererako aupada garrantzitsu bat eragin zuen. Berak aurkitutako formulen bidez



gas bateko molekula desberdinen abiadurak lor daitezke. Hobeto esanda, berak zera eman zigun: molekula baten abiadura  $v_1$  eta  $v_2$ -ren artean egoteko probabilitatea. Maxwellen funtzioa  $f(v)$  ve, ala azaltzen badugu, probabilitatea hori  $\int_{v_1}^{v_2} f(v) \cdot dv$  da.

Maxwell-en funtzioa lortzeko, zenbait urte geroago Boltzmanek aipatu zuen bidea eramango dugu. Bedi gas baten zutabe bat; gas honek grabitatea jasango du eta, beraz, presioa eta dentsitatea altueraren funtzioak izango dira. Bedi zutabearen puntu guztiaren temperatura uniformea;  $z$  altuera batetan dau den presioa eta dentsitatea  $P$  eta  $\rho$  baldin badira,  $z + dz$  altueran dagoen presioa  $P + dP$  izango da eta  $dP = -\rho g dz$ .

Hydrostatikaren oinarritzko erlazioaren arabera.

Baina dadukagun gasa ideala bada:  $P \cdot V = NRT$ , edo

$$P = \frac{\rho RT}{M}$$

$M$  gaseko mol baten masa da eta

$$\frac{\rho}{M} = \frac{N}{V} \quad \text{bolumen-unitatean dagoen mol-kopurua.}$$

Ekuazio hauen artetik

$$\frac{dP}{P} = -Mg \frac{dz}{RT}$$

eta integratu ondoren:

$$P = P_0 e^{-Mgz/RT}$$

$P_0$ ,  $z = 0$  altueran dagoen presioa dugu.

$n$  bolumen-unitatean dagoen molekula kopurua bada,  $P$  eta  $n$  zuzenki proportzionalak dira.

Hori dela eta,  $n$  eta  $z$  artean dagoen erlazioak aurkitutakoa bezalakoa izan behar du; beraz

$$n = n_0 e^{-Mgz/RT}$$

Baina  $\frac{M}{R}$  beste era batetan jar daiteke:-

$$\frac{M}{R} = \frac{N_A \cdot m}{R}$$

$N_A$  = Avogadro-ren zenbakia, hots, mol batetan dagoen molekula-kopurua

$m$  = molekula bateko masa

$\frac{R}{N_A}$  =  $k$  egiten badugu, definizioz hau Boltzmann-en konstantea dugu; beraz

$$n = n_0 e^{-mgz/kT} = n_0 e^{-E/kT} \quad (*)$$

$z$  altueran dagoen molekula baten energia potentziala  $E$  bait da; hots,  $E = mgz$ .

$e^{-E/kT}$ -ri Boltzmann-en faktorea deritzogu.

Altuera-banaketa abiadura-banaketa bihurtzeko  $h(v_z)$  definitu behar dugu. Hau dimentsio bakarreko abiaduren banaketa dugu ( $f(v)$  hiru dimentsionala denaren arauera); beraz, molekula baten abiaduraren  $z$  osagaia  $v_z$  eta  $v_z + dv_z$ -aren artean egoteko probabilitatea  $h(v_z) \cdot dz$  da. Beraz,  $z = 0$  altueran  $v_z$  eta  $v_z + dv_z$ -ren artean abiaduraz azalera unitatetik segundo bakoitzean ateratzen den-molekula kopurua:

$$n_0 \cdot v_z \cdot h(v_z) \cdot dv_z \quad \text{da.}$$

Horietakoa molekula bakoitzak  $z$  eta  $z + dz$ -ren artean dagoen altuera maximo bat lortzen du; altuera horretan

$$\frac{1}{2} v_z^2 = g \cdot z \quad \text{eta beraz,} \quad v_z \cdot dv_z = g \cdot dz$$

Hori dela eta,  $n_0 v_z h(v_z) dv_z$  zera izango da:  $z$  altueran azalera-unitatetik segundo bakoitzean pasatzen den kopuruaren eta  $z + dz$ -tik pasatzen denaren arteko kendura; beraz:

$$n_0 v_z h(v_z) dv_z = \int_{v_z=0}^{v_z=\infty} n(z) \cdot v_z \cdot h(v_z) \cdot dv_z - \int_{v_z=0}^{v_z=\infty} n(z + dz) \cdot v_z \cdot h(v_z) \cdot dv_z (\cdot)$$

hemen  $h(v_z)$   $z$ -rekin erlazionaturik ez dagoela onartzen da (tenperaturak ez daduka  $z$ -rekin zerikusirik, eta).

Molekulen batezbesteko abiadura hauxe dugu:

$$\bar{v}_z = \int_{v_z=0}^{v_z=\infty} v_z \cdot h(v_z) \cdot dv_z$$

( $\cdot$ ) ekuazioa berriz idatziz:

$$n_0 \cdot v_z \cdot h(v_z) \cdot dv_z = \bar{v}_z n(z) - \bar{v}_z \cdot n(z + dz) = -\bar{v}_z dn(z)$$

(\*) ekuazioa diferentziatuz:

$$dn(z) = - \frac{mg}{kT} n_0 e^{-mgz/kT} \cdot dz$$

Beraz

$$h(v_z) \cdot dv_z = \frac{\bar{v}_z \cdot m \cdot g \cdot dz}{v_z kT} \cdot e^{-mgz/kT}$$

Baina,  $v_z^2 = 2gz$  eta  $v_z \cdot dv_z = g \cdot dz$  direnez gero  $h(v_z)$  atera dezakegu

$$h(v_z) = \frac{m\bar{v}_z}{kT} e^{-mv_z^2/2kT} = \text{konstante} \cdot e^{-mv_z^2/2kT}$$

Beraz, dimentsio bakarrekoari dagokion funtzioa lortu dugu. Orain zera bidezkoa dirudi: v-ren x eta y osagaiak z-ren antzera banatzen direla, eta hiru osagai hauek elkarrekiko independenteak direla onartzea.

Independenteak diren zenbait gauza batera gertatzeko probabilitatea, bakoitza gertatzeko probabilitateen biderkadura denez gero, molekula baten abiaduraren x osagaia  $v_x$  eta  $v_x + dv_x$  artean egon dadin, y osagaia  $v_y$  eta  $v_y + dv_y$ -ren artean eta z osagaia  $v_z$  eta  $v_z + dv_z$ -ren artean egon dadin zera da:

$$Ae^{-mv_x^2/2kT} \cdot e^{-mv_y^2/2kT} \cdot e^{-mv_z^2/2kT} \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z$$

A konstante bat da.

Expresio hau koordenatu esferikoetara pasatu ondoren integratzen badugu zera lortuko dugu:

$$f(v) = 4 \pi A v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

A konstantearen balioa aurkitzeko hau suposatuko dugu: molekula baten abiadura zero eta infinituaren artean egon dadin probabilitatea 1 dela

$$\int_0^\infty f(v) \cdot dv = 1$$

hau erabiliz:

$$f(v) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/kT}$$

Hauxe da Maxwell-en abiadura-banaketaren formula. Zoritzarrez, espresio honen egokitasuna frogatu arte hiruogeitamar urte pasatu behar zuten; hau I. F. Zartman-ek egin zuen 1931.urtean esperimientalki Geroago 1946.urtean Rainwater eta Havens-ek neutroiak erabiliz beste horrenbeste demostratu zuten. Bigarren frogaketa honek Maxwell-en abiadura-banaketaren orokortasuna adierazi zigun, Maxwell-en garaian ezagutzen ez ziren zatikiek lege hau ere betetzen dutela frogatu izan bait da.

L. M. BANDRES