ESPAZIOAREN KURBADURA

1854.urteko udaberrian, Bernhard Riemann izeneko matematikari alemana oso kezkatua zegoen, handik egun gutxi barru oso azterketa inportantea egin behar zuelako eta azterketa horretan bere etorkizuna jokatzen zuelako. 28 urte zituen eta oraindik lehenengo soldata jaso gabe; bere aitak, ministro protestantea, bidaltzen zion diru-apurrez bizi zen; hilero jasotzen zuen dirua eta, erantzun moduan, bere aita eta anaiari idatzi zien kartan Berlin eta Göttingen hirietako unibertsitateetan zer-nolako harrera ona aurkitu zuen bere lanetarako komentatzen zuen. Doktore titulua zeukan eta une honetan "irakurle" (soldatarik gabe) postua lortzeko, lan bat burutu behar zuen filosofiari buruz, Göttingen-go unibertsitatearen irakasle-batzar osoaren aurrean aurkeztu eta defendituz.

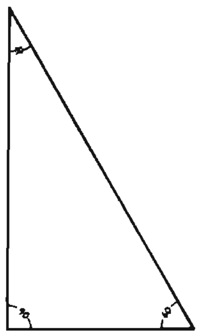
Hiru gai proposatu zizkioten; "lehenengo biak ondo menperatzen ditut" idatzi zion Bernhard-ek bere anaiari, "baina hirugarrena Gauss-ek aukeratu du eta larri nago".

Karl Friedrich Gauss matematikari alemana dekanoa zen garai hartan, eta Unibertsitate osoaren ohore. Zeruari buruz Bernhard-ek zeukan irudian oso gerturik aurkitzen ziren Jainkoaren eserlekua eta Gauss-en katedra (iritzi hau arrunta da gaur egun oraindik Göttingen-en). Gauss-ek aukeratu zuen gaia zera izan zen: "Geometriaren oinarrian aurkitzen diren hipotesiak". Gauss-ek berak ez zeukan ia ezer idatzia gai honi buruz, ohar labur batzuk izan ezik; eta aukera hori egin bazuen, arrazoia zera izan zen: kuriositate handia zeukala gai berri eta latz honi buruz Riemann-ek zituen ideak ezagutzeko. Kuriositate hau Gauss-ek gai honi ematen zion inportantziarekin oso lotua zegoen, berak zerbait idatzirik bait zeukan; eta jakin egin nahi zuen Riemann bezalako matematikari gazte baten ideak eta bere propioak noraino uztartzen ziren.

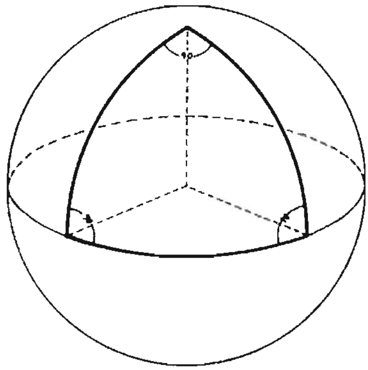
1854.urteko ekainaren 10ean, larunbata, irakurri zuen bere lana Riemann-ek. Entzulegoa, klasizista, historiadore eta filosofoz zegoen osaturik ia osoki, matematikari gutxi tartean zirelarik; hori zela eta, Riemann-ek, ndimentsiodun espazioen kurbadurari buruz hitzegitea erabaki zuen ekuazio bakar bat ere idatzi gabe. Nola ulertu behar da erabaki hau, "politesse" bezala edo asmo maquiaveliko bat bezala? Ez dugu galdera honen erantzuna inoiz izango; baina Gauss-ek, ekuaziorik gabe ere, ondo ulertu zuela esan dezakegu, jakina bait da zein entusiamo biziz komentatu zituen bere lankide Wilhelm Weber-ekin Riemann-ek aurkeztutako teoriak.

Gauss-en entusiasmoa guztiz justifikaturik zegoen; Riemann-en ideak hain ziren berriak non oso zientifiko gutxi zegoen prestaturik bere teoriak ulertzeko; eta kuriosoago dena, bere teoriak 50 urte itxaron behar izan zituen konfirmazio experimental bat izateko Einstein-en erlatibitatearen teorian. Einstein-ek frogatu zuen, izan ere, Riemann-en teoriek oso aplikazio zuzena zutela grabitazioaren eta argiaren artean gertatzen den eragina estudiatzeko; eta, modu honetaz, gaur egun gure unibertsoaren ikuskera menperatzen duen erlatibitatearen teorian oso toki inportantea betetzen dute Riemann-en idea geometrikoek.

Atzera ehun urte itzulirik saia gaitezen orain egun horretan Riemann-ek defenditu zituen ideak esplikatzen. Baina, idea horietara ailegatu aurretik, beste zenbait puntu argitu beharko dugu.



1. IRUDIA



2. IRUDIA

Geometria launaren ideekin denok gaude ohituak; zuzen bat bi punturen artean distantziarik motzena da, lerro paraleloek ez dute inoiz elkar topatzen, hiruki baten hiru angeluen arteko batura 180 gradutakoa da, eta abar... Geometria esferikoaren legeak ere oso ezagunak zaizkigu, nahiz eta legeak zertxobait desberdinak izan: esfera baten bi punturen arteko biderik motzena zirkulu maximo batena da (zirkulu maximoa, esferaren eta diametroa eta bi puntu horiek barneratzen dituen planoaren arteko ebakidurak definitzen duen kurba da, zirkulu honek bi zati berdinetan mozten du esfera). Zirkulu maximo pare batek bi puntutan ebakitzen dute elkar; adibidez. Lurraren bi hemisferio edozeinek ipar eta hego-buruetan ebakitzen dute elkar. Hiru segmentu maximoez (adibidez Lurraren ekuatorearen laurdena, eta bi meridianoren iparraldeak) osaturiko hiruki esferikoaren hiru angeluak zuzenak dira; hots 90 gradukoak, eta beraz beren batura 270 gradukoa. Horrelako hiruki baten eta hiru erpinak plano batetan dituen beste baten artean dauden diferentzi guztiak bere izate esferiko horretan daude.

Nola jakin, bestalde, mahai baten azala launa dela eta Lurrarena berriz esferikoa. Antzinako zibilizazio guztiek Lurra disko laun bat bezala imajinatu dute, mendiak ale-piloak balira bezala erregearen mahai gainean jarririk. Hilargiraino joateko kapazak ez zirenez, nola asmatu zuten grekoek Lurraren borobiltasuna? Ipar-Izarra Grezian Egipton baino gorago dagoela behatuz. Beraz, argi ikusten da esfera baten borobiltasuna kanpotik begiratuz edo, bertan egonik kanpoko objektuak behatuz froga daitekeela.

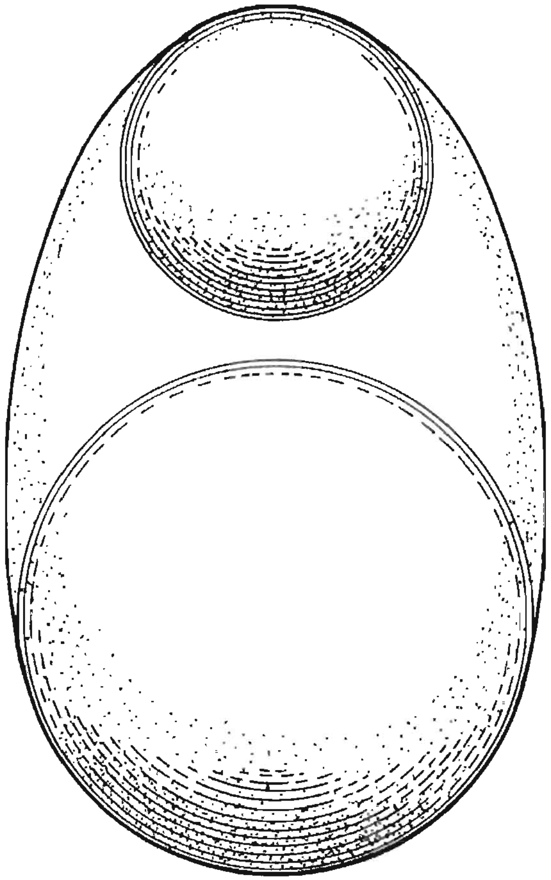
Gizonak bi modu zituen Lurra borobila zela frogatzeko, eta egin ere horrela egin zuen, hain zuzen. Horrelako bat nabigazioa izan zen, Lur osoari buelta emanez norantza berdina segituz beti; modu honetan zera ikusi zuen: Lurraren azala mugarik gabekoa izan arren, azalera finitua zeukala. Gertaera hau oso bitxia da, lurraren azala muga-gabea da, baina finitua (hizkuntza arruntean ez dira askotan bi kontzeptu hauek ondo bereizten), eta honek zera erakusten du: Lurraren borobiltasuna zein gutxi sartu den gure mentalitatean.

Modu honetan, nahiz eta zeruak beti hodei beltzez estalita egon, posible izango litzaioke gizonari Lurraren borobiltasuna asmatzea. Pentsa dezagun nabigazio hau ere ez zitekeela posible izan, edo Lur osoari buelta emateko haina ez behintzat; hala ere beste bide bat gelditzen da oraindik Lurraren borobiltasuna frogatzeko: goiko lerroetan aipatzen diren geometria esferikoaren legeak alegia.

Lurraren azal gainean hiruki bat hartzen badugu; esate baterako, alde bakoitzak 20 bat metro dituen hirukia eta bere angelu guztien arteko batura kalkulatuko bagenu, emaitza, dudarik gabe, ez litzateke 180 graduetatik asko aldenduko. Geroz eta hiruki handiagoak hartzen baditugu hiruki horien kurbadura geroz eta nabarmenagoa denez, batura 180 graduetatik aldentzen hasten da kantitate neurgarri batetan; bide honetan, neurketa-sistemak hobetuz, eta mapen eraiketan saiatzeko metodo hauek derrigorrezkoak dierenez; gizonak aisa frogatuko luke Lurraren borobiltasuna eta neurketa hauen bidez Lurraren erradioa ere bai, aurreraxeago ikusiko dugun moduan.

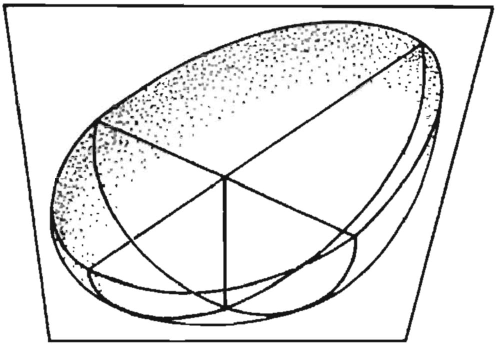
Ez da pentsatu behar azal launa eta esferikoa bi azal-klase bakarrak direnik; pentsa dezagun arraultza baten azala: buru bat bestea baino handiagoa izaten da. Buru baten azal-zati bat separatzen badugu, esfera baten azalpuska bat izan zitekeela ikusten da. Zati hori beste buruan hartzen bada, berriz, itxura esferikoa izango du orobat, erradio txikiagoko esfera batekoa.

Buru txikian hartutako azalaren kurbadura handiagoa izango da beste buruan hartutakoarena baino; idea intuitibo honetatik abiaturik definitu dute geometrek kurbaduraren balioa, erradioaren karratuaren alderantzikoa bezala; modu honetan, erradioa geroz eta txikiagoa denean kurbadura hainbatenaz handiagoa izaten da.



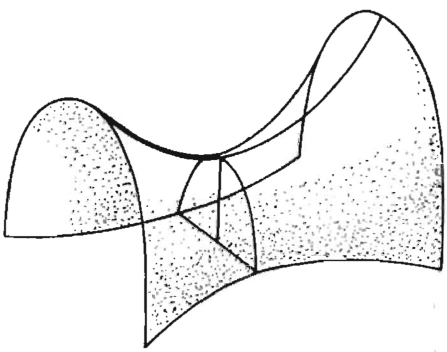
3. IRUDIA

Eta arraultzaren erdialdeko zona batetik hartuko bagenu azal-zati bat, nola kalkulatu burbadura?: zailagoa da, azal-zati hori ezin bait da esfera baten zati bat bezala onartu; problema, gutxi gorabehera, modu honetan soluzionatu da: eman dezagun azal-puska hori mahai baten gainean jartzen dugula; bere forma obalo batena izango da: modu honetan jarririk, kupula txiki baten itxura dauka. Eta kupula honen ebakidura bertikal orok konkabotasuna beheko aldera begira duen kurba baten forma hartuko du; ebakidura guztiok zirkunferentzi puskak dira gutxi gorabehera, baina ebakidura desberdinen erradioak ez dira berdinak izango. Oinaren zati estuari erradio txikiena egokituko zaio, eta alde zabalenean dagoenari logikoki handiena. Dei diezaiogun erradio txikienari R_1, eta R_2 handienari; batezbesteko balio bat hartuz, kurbadura $R_1 \times R_2$ biderkaduraren alderantzizkoa dela onartzen da; azal hori esferikoa bada kurbadurak lehengo balioa bera hartuko du.



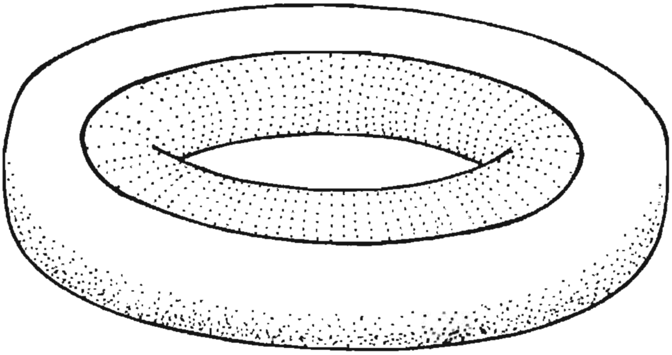
4. IRUDIA

Definizio hauetaz baliaturik arraultzaren azal-zati txiki baten kurbadura bilatzen da, eta kurbaduraren balio honek aldatuko du arraultzaren azal gainean puntu batetatik bestera mugitzen bagara: ez luke inongo sentidorik izango arraultza osoaren kurbadurari buruz hitzegitea; hitzegitekotan, zati txiki baten kurbaduraz bakarrik hitzegin dezakegu.



5. IRUDIA

Har dezagun orain beste azal-klase bat, zeladura batena alegia; horrelako azal batetan, ebakidura zeharkako baten konkabotasuna beheko aldera duen kurba batena da. Baina ebakidura bertikala bada azaltzen den linearen konkabotasuna goiko aldera dago; gertaera honek erabat ondo bereizten ditu horrelako azal baten zati txiki baten kurbadura eta arraultza-azal batena. Geometrek zeladura moduko azalaren kurbadura negatiboa dela esaten dute bere puntu guztietan, arraultza-azal batena positiboa den bitartean: azal-zati txiki baten kurbadura $R_1 \times R_2$ biderkaduraren alderantzizkoa bezala definitzen da kasu honetan, baina zeinu negatibo bat ematen zaio.



6. IRUDIA

Oraindik ere beste kasu bat kontsidera daiteke: "toro" batena, alegia. Barneko aldera (zentru aldera) begiratzen duen azalerdia eta kanpoko aldera begiratzen duena konparatzen badira, segituan ohartzen dugu desberdintasun bat dagoela: barneko aldera dagoen zati txiki baten kurbadura negatiboa den neurrian kanpoko aldera begiratzen duenaren azal batena positiboa dela. Modu honetan zera ikusten da: ez dagoela inongo arrazoirik azal baten puntu guztietan kurbadura zeinu berdinekoa dela pentsatzeko; azal baten puntu batetik bestera pasatzen garenean kurbaduraren balioa alda daiteke; baina ez balio absolutuz bakarrik, baizik eta zeinuz ere bai.

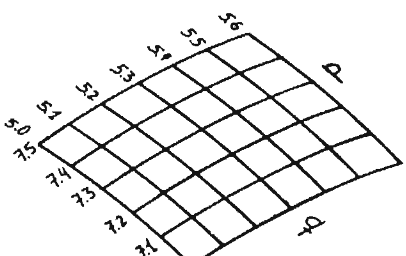
Gogora dezagun Riemann-en garaian kurbadurari buruzko ideak zein egoeratan zeuden errepasatu nahi dugula, hitz gutxitan eta laburki. Ordurarte esandakoa jakina zen XVIII. gizaldiaz geroztik; Leonhard Euler matematikari suizoari esker gai hau oso aurreraturik zegoen; Euleren lanak jarraipen bikaina izan zuten bere ikasle eta jarraitzaileen artean; hauetako talderik inportanteena Pariseko Eskola Politeknikoan bildu zen. 1827.urtean Gauss-ek, Riemann esaminatu zuen Tribunalearen burua, gaia borobildu eta zehaztu zuen; helburu hori betetzeko lan bat argitaratu zuen; egindako aurkezpena hain da argia eta egokia non gaur egun ere erabilgarria bait litzateke gai honi buruzko sarrera bezala azaltzeko.

Gauss-en abiaburua zera izan zen, geografoek Lurraren gainean puntu bat kokatzeko latitude eta luzera-koodernatuak erabiltzen dituztela. Sare bat dibujatzen dute Lurraren gainazalean "luzera-meridionak" eta "latitude-paraleloak" delako lineen bidez (adibidez, Iparburutik Hegoburura eta Greenwich-en barrena doan hemisferiotik 85° ekialdera dauden puntu guztiek meridiano bat osatzen dute). Zilegia da, beraz, "meridianoen" eta "paraleloen" familiez hitzegitea. Idea honetan finkaturik, eta azal baten gainean puntu bat determinatzeko, Gauss-ek p eta q kurben familia bi aukeratzea proposatzen zuen: noski, p eta q kurben familiek egokiak izan behar dute puntu guztietatik pasatzeko; aukera on batez egin behar da lan hau.

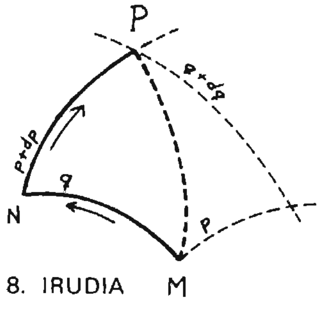
Gauss-en intuizio inportanteena zera izan zen: gainazal laun batetan ekialdera 3 km egiten baditugu, eta ondoren 4 iparraldera, denok dakigunez abiaburutik bost kilometrotara gaude zuzenean neurtuz gero. Pitagorasen teoremak aspaldian frogatu zuen puntu hau; baina Gauss-ek ikusi zuenez, propietate hori ez zen betetzen azal kurbo batetan, esfera bat dela, edo zeladura bat edo toro bat; azal hauetan propietate desberdin bat asmatu beharko zen; hasteko, p eta q kurbak ez dira puntu guztietan ebakiko angelu zuzenez. Gertaera honek alda erazten du $a^2 + b^2 = c^2$ Pitagorasen formulari beste termino hau herstuki ajustatua badago, gainazalari sare honen angeluak eta aldeak aldatuz joango zaizkio poliki-poliki puntu batetik bestera kurbaduraren balioa aldatzen den arabera.

Gauss-ek ekuazio matematiko oso famatu batez adierazi zuen puntu hau. Eman dezagun p eta q kurba bi pasatzen direla azal makur batetan dagoen M puntu baten barrena. M puntuaren "p kuasilatitudeak" eta "q kuasiluzerak" balio iraunkorrak hartzen dituzte M puntuan. M puntutik gertu dagoen beste P puntura joan nahi dugunean, lehen-lehenik p-ren balioa handitzen dugu pitin bat q ezer aldatu gabe; p-ren gehiketa txiki eta arbitrario hau adierazteko Gauss-ek "dp" ikurra erabili zuen. Modu honetan, luzeraz p + dp eta latitudez q dituen M puntura ailegatzen gara; ondoren q handitzen dugu dq batetan; honela latitudez q + dq eta luzeraz p + dp izango duen puntu batetara heltzen gara. Beste problema bat ere azaltzen da M-tik P-ra dagoen distantzia kalkulatu nahi dugunean; distantzia honi, txikia eta arbitrario denez, "ds" izena eman zion Gauss-ek, eta Gauss-ek emandako idazkeran hona hemen berak proposatu zuen berdintza

$$ds^2 = Edp^2 + 2\ Fdpdq + Gdp^2$$



7. IRUDIA



8. IRUDIA

Berdintza honek, Matematikaren eta Fisikaren eraiketan, ohorezko toki bat betetzen du; gailur bakartia, gailur egokia. Jainko bat al zen ikur horiek idatzi zituena? Beste bi pauso gehiago bakarrik ziren beharrezkoak, honen ondoren Riemann-ek eta Einstein-ek emandakoak hain zuzen, "erlatibitate general" izeneko teoriara heltzeko.

Azal arbitrario honen M puntu bakoitzean, ekuazio hau ez da hirugarren aldearen karratua kalkulatzeko teorema euklidearraren desberdina, ds hirugarren alde hori izanik besteak dp eta dq direlarik; eta hala bada ez da harritzekoa, M puntu baten ingurune txiki bat launa balitz bezala kontsidera bait daiteke; baina hemen dago, bereziki, Gauss-ek sartu zuen puntu berria: E, F eta G funtzioak kontutan hartzea alegia; funtzio hauen balio zenbakizkoak jarraikiro aldatzen dira gainazalaren puntu batetik bestera mugitzen garen arabera. Gauss-ek ikusi zuenez, E, F eta G funtzio hauen aldagai independenteak p eta q ziren, hots, "kuasilatitude" eta "kuasiluzeraren" balioenak hain zuzen. Plano baten gainean gainazal launa karratu txiki-txikietan zatituko duen p eta q lineak aukeratzen baditugu, gainazalak xake-taula baten itxura hartuko du; azalera mota berezi honetan $ds^2 = dp^2 + dp^2$ ekuazioa da hiru magnitude horiek erlazionatzen dituena, eta beraz E eta G funtzioen balio zenbakizkoak I izango dira eta F-rena zero. Baina azal makur batetan E, F eta G funtzioen balioak aldatzen dira, eta balio hauek era abstraktu baina oso zehatz batez adierazten dute kurbadura-aldaketa azal horretan.

Gauss ez zen horretan gelditu; aurrerago joanik, teorema bat asmatu zuen. Bertan zionez, posible da puntu baten kurbadura ezagutzea, hutshutsik puntu horretan E, F eta G funtzioen balioak eta ingurunean nola aldatzen diren jakinez gero. Zergatik da hain interesgarria teorema hau? Jarraitzen ari garen Gizadiaren Historia asmatu honetara itzuliz gero, hodeiez estalitako fikziozko lur horretan bizi izango bagina ere, erraza izango litzaieke topografoei gure lurraren kurbadura determinatzea E, F eta G funtzioen balioak bilatuz, teoremaren aplikazio bat bezala, eta guzti hori ilargira joan gabe eta izarrak ikusi gabe; puntu desberdinetan kalkuluak eginez posible izango litzateke azalaren forma ezagutzea, eta esfera, arraultzazal edo beste azal-klase desberdin baten gainean bizi garela frogatzea (kurbaduraren balio hori berdina izango balitz puntu desberdinetan, esfera baten gainean gaudela argi gelditukoo litzateke frogatua).

Izan ere, norbaitek pentsa lezake hau dela zientifikoek asmatu duten katramiloen artean alferrenetako bat. Zertarako denbora galdu, mundua beste forma batekoa izango balitz zer gerta zitekeen asmatzen? zertarako ibili mundu irudikor batetan existitzen ez den jendearen jokabidea aztertzen? Arrazoia arrunta da: jende hori gu geu garela. Gertatzen dena zera da: esaten ari garen hau ez dela ondo ulertzen beste inongo explikaziorik ematen ez bada.

Imajina ditzagun paperezko pieza txiki eta laun batzuk, forma desberdinetakoak, esfera handi eta bigun baten gainean. Paper-pieza txikiak bizirik daude eta mugitu egiten dira. Pieza horiek mundu horretako pertsonak dira; baina beren gorputzak ez dira azalez mugaturiko bolumenak, kurbez mugaturiko azalak baizik. Pertsona hauek, gorputza guztiz launa izanik eta inongo lodierarik ez dutenez, ezin dute espazioari buruz inongo idea intuitiborik ezagutu; beraiek gainzal launak besterik ez bait dira, eta beren zentzuek mundu laun honi buruz bakarrik informazioa emateko egokituak daude, eta ez dute beste mundu modu bat imajinatzeko aukera intuitiborik inoiz izango; hitz gutxitan, ezin dute hirugarren dimentsioa esperientzi bidez ezagutu.

Baina pertsona hauek intelijenteak dira; Matematikaren eta Fisikaren legeak ezagutzen dituzte; beren Geometria bi kapituluz dago osaturik: geometria linealaz eta launaz alegia. Fisikan, berriz, aldagai bateko problemak diagrama linealaz adierazten dira; eta bi aldagaitakoak diagrama launez. Hiru, lau edo bost aldagairen beharra planteatzen denean algebrara jotzen da: "Pena bat da —esaten dute— problema horiek argitzeko diagrama egokiz baliatu ezina".

XIX. mendearen lehenengo erdialdera (bere XIX.mendea, noski!) idea iraultzaile bat sortu zen matematikarien artean: "Ezin dugu —esan zuten— hirugarren dimentsio bat imajinatu, baina problema fisikoak soluzionatzeko x, y eta z aldagaiak erabiltzen dira; orduan, zergatik ezin da hiru dimentsio dituen espazio batez hitzegin? Are gehiago: nahiz eta imajinatu ez, oso egokia izango litzateke espazio horietan kokatutako puntu, linea eta azalei buruz hitzegitea; agian zerbait positiboa lortuko da idea honetatik eta, nolanahi ere, minik ez du egingo". Eta saiatu egin ziren.

Ez dut uste ipuin honekin gehiago segitu beharrik dagoenik. Bere esanahia argia da. Gu ez gara, puntuz-puntu, pertsona horien berdinak, gure gorputzek hiru dimentsio bait dituzte eta mundu *hirudimentsional* batetan bizi bait gara. Gure tarteko nork imajina dezake laugarren dimentsioa? eta hala ere espazio-klase hori eskatzen duten problemetan ari izaten gara askotan; esate baterako, x, y, z eta t dimentsioek eskatzen dituzten problemetan, edo eremu elektromagnetikoen problemak ditugunean puntu batetan, Ex, Ey eta Ez intentsitatearen balioei t balioa gehitu behar bait diegu. Aldagai guztiak kontutan hartzeko, beste hainbeste egin beharko litzateke bere anaia bizkia den B eremu magnetikoaren intentsitatearen balioak adierazteko. Oso urruti gelditzen da hiru dimentsio dituen espazioa. Fisikaria eta matematikaria n dimentsio dituen espazioan aurkitzen da situatua behin baino gehiagotan, n hau zenbaki arrunt edozein bat delarik.

Riemann-en hitzaldi famatu horretan ere n dimentsio dituen espazio bat proposatzen zen. Edozein geometrak, nahiz eta punta-puntakoa ez izan, erraz definituko luke espazio-klase honetan bi punturen arteko distantziaren formula; bi dimentsio dituen espazioan $de^2 = dx^2 + dy^2$ formula betetzen denez, n dimentsio dituen espazioan proposatu beharrekoa $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots\ldots + dx_n{}^2$ modukoa izango litzateke; edo modu laburrago batez idatziaz,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=n} dx_i^2$$

(diferentzial s bi, berdin sigma batukaria i 1-tik n-raino diferentzial x azpi i bi); baina jokabide hau oso sinplea, sinplegia zen. Riemann-ek urrutirago joan nahi zuen, ez zituen alferrik galdu nahi Gauss-en lanak estudiatzen erabilitako ordu piloak eta

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=n} dx_i^2$$

berdintza abiaburu bezala onartuz irtenbiderik ez zegoela ikusi zuen; Pitagorasen teorema onar bait daiteke, bakar-bakarrik, sare zuzenangeluar batez zatikatutako plano batetan. Benetako bide zuzena Gauss-en formula zabaltzea litzateke, formula hau egokia bait da azal makurretan ere, eta planoa azal klase hauen adibide konkretu bat besterik ez bait da. Gaussen formulak bi gauza gehitu zizkion Pitagorasen teoremari: a) dp eta dq balioen karratuei dp eta dq kantitateen arteko biderkaduraren bikoitza gehitu zion; b) hiru termino hauek E, F eta G koefizienteez biderkatu zituen, E, F eta G puntuz puntu aldatzen direlarik.

Egin dezagun gauza bera, zer den intuitiboki ulertzen ez bada ere, hiru dimentsio dituen hiperazal batetan. Hiperazal honen gainean p, q eta r azal-familiak zabaltzen baditugu, eta idazkera egoki batez x_1, x_2 eta x_3 izendatuz, Gaussen idea hiru dimentsioetara pasatzea proposatzen zuen Riemann-ek. Bi puntuen arteko distantziaren karratua kalkulatzeko, dx_i balio bakoitzaren karratuari, $dx_i\ dx_j$ biderkaduraren bikoitzak gehitu beharko zaizkio; idazkera matematikoz, hiru dimentsio dituen espazioan

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + 2g_{13}dx_1dx_3 + 2g_{23}dx_2dx_3$$

ikusten denez sei dira espazio honetan beharrezko koefizienteak (2 faktorea ez da derrigorrezkoa idaztea baina dotoretasun algebraiko bat ematen dio formulari). Formula hau da egoki bakarra hiru dimentsio dituen hiperazal bateko puntuen arteko distantzia kalkulatzeko; aipatutako sei koefiziente horiek aldatuz joaten dira puntu batetik bestera.

Esana dugun bezala Riemann-ek ez zuen bere lana dimentsioen kopuru finitu batetan finkatu; berak, orokortasun osoaren bila, n dimentsioez hitzegiten zuen. Objektu geometriko hauek izendatzeko modu baten bila zebilen beste bi puntu oso inportanteez ohartu zenean: a) zatiki bat librea dela (teorian behinik behin) linea baten puntu batetik beste pasatzeko mugimendua leunki eta bigunki egiten bada; era berean mugi daiteke jarraikiro gainazal eta espazio batetan; b) geometria launez hitzegiterakoan, plano batetan dibuja daitekeen irudiez hitzegin dugu, eta plano hori logikoen hizkeran gure "pentsamenduen unibertsoa" bihurtzen da. Baina handik gutxira, geometria espazialera pasatzen garenean, planoak gure "unibertso" berriaren zati bat besterik ez dira eta era askotako planoak aztertzen dira; hitz laburretan, planoa murgildurik dago espazioan.

Oharpen guzti hauen fruitu gisa, Riemann-ek "jarrai" izena asmatu zuen puntu bat libre mugitzen uzten duten n dimentsiotako objektu geometrikoentzat. Zuzen bat, adibidez, dimentsio bateko jarrai bat da; eta zuzen honen geometria aztertzeko (hala nola zuzenkiak puntuen arteko distantziak, translazioak eta abar...) ez du axola dimentsio bateko jarrai hori unibertsoa den edota bi, hiru lau,... n dimentsio dituen espazio batetan dagoen murgildurik. Esfera baten azala edo toro batena, bi dimentsiotako jarrai bat da, ikusia dagoenez. Baina zer aldatzen da unibertsoa balitz bezala, edota bi, hiru... n dimentsio dituen espazio batetan murgildutakoa bezala aztertzen denean? ezerez.

Ondo, baina gure espazio intuitiboa hiru dimentsio dituen jarrai bat da; goian onartutako logikari jarraituz zera admititu beharko genuke: ez dela ezer aldatuko, espazio hirudimentsional hori unibertso bezala hartu ordez dimentsio gehiagoko beste batetan murgildurik bailegoan aztertzen denean. Baieztapen honen esanahia ezin adierazi da intuitiboki, baina logikaren bideak horraino eramaten gaitu ihesbide posiblerik gabe; intuizioak ikusten ez duena logikak erakusten digu. Azaleko paradoxa hau konstante bat bihurtu da Matematikaren historian.

Hona hemen, beraz, gutxi gora-behera Riemann-en buruan aipatutako 1850 urte hartan zer egosten zen. Saia gaitezen, ondoren, hemendik abiaturik noraino iritsi zen aztertzen; 1854.urteko lanean azaltzen diren idea oinarrizkoak aztertuko ditugu bereziki.

Lehenengo irakurketa azkar batetan, Riemann-en ahaleginak bi dimentsio baino gehiago dituen jarrai batetan kurbadura definitzera zuzendu zirela ikusten da. Gainazal bat bi dimentsiotako jarrai bat da eta, ikusia dugunez, kurbadura delakoa puntu baten inguruan dagoen azal txiki baterako definiturik zegoen zenbaki bakar batez: zenbaki hau positiboa da arraultz moduko azal batentzako, eta negatiboa zeladura baten kasuan; balioa zeroa bada puntu guztietan, azala plano bat dela frogatzen da. Riemann-ek frogatu zuenez posible da kontzeptu hau n dimentsiotako espaziora zabaltzea, baina balioa ez zen zenbaki bakar batez adieraziko; hiru dimentsiotako jarrai baten kurbadura definitzeko hiru zenbaki beharko ziren eta abar... Riemann-en lanean ez ziren balio hauek kalkulatzen: bere existentziaren posibilitatea baieztatzera mugatu zen, kalkulu osoa desarroilatzeak memoria luze bat beteko bait luke eta azalpenak zenbait aste eskatuko.

Pentsamendu guzti hauek, Matematika abstraktuaren jolas huts eta alferrak dirudite; noraezean galduriko errealitaterik gabeko Matematika. Halaz ere, Riemann-ek egin zuen ahaleginik markatuena, gai hau Matematikaren kuriositate bat ez zela adierazteko, baizik eta benetazko arazo fisikoa; eta, oraindik gogorrago dena, modu experimentalez froga daitekeen arazoa dela baieztatzen zuen; Riemann-en ausardia ez zen makala, arraioa!

Itzul gaitezen izaki laun horiengana, azal neurrigabeko haren gainean bizi diren haietara. Gauss-en "errege teoremak" zera frogatzen du: unibertso bidimentsionalaren izaki bidimentsional horiek, matematika sakonki ezagutuko balute, bere unibertsoaren zati txiki edozein baten kurbadura kalkula zezaketela, alegia. Nola imajinatuko luke jende horrek azal makur bat hiru dimentsiotako espazioa ezagutzeko aukerarik izango ez balu?

Erantzun gisa, matematikaren birtutea ezagupen hori ematea dela esan daiteke; nolabait, eta beste pretentsiorik gabe, matematikak ezaguera klase berezi bat sortzen duela alegia. Linea makurraren kontzeptua ezaguna izango litzateke beren artean, bere azalaren gainean ibiltzeko linea zuzen eta makurrak dibujatzea posible bait da. Beren arteko "Riemann-en" batek idea intuitibo hau jeneralizatuz n dimentsiotako espazioaren kontzeptzioa sortuko balu; bide algebraiko eta abstraktu honetaz baliaturik eta n dimentsiotako "jarrai" baten kurbadura definitzeko asmotz bultzaturik Riemann-ek proposatu zuen formula berdinera iritsiko zirratekeen, zihur asko; eta mundu irudikor horren topografoek, beren unibertso bidimentsionalaren kurbadura kalkulatuko zuketen kurbadura hori zer arraio izan zitekeen imajinatu gabe.

Hau da, lerroz lerro eta letraz letra, gure egiazko egoera: gure unibertso hirudimentsional honen kurbadura kalkulatzen saiatzen garenean; kuriositate eta harriduraz beterik bueltatuko gara Riemann-en lanera berak nola definitu zuen ikusi ahal izateko.

Hona hemen Riemann-en proposamena: kurbadura definitzen duten n dimentsiotako espazio baten koefiziente guztiak zero izango balira, espazio honi espazio launa deituko genioke; hau bait da kurbadura 0 duen azalei ematen diegun izena. Espazio hirudimentsionala sare kubiko estu batez zatikatuko bagenu, plano bat karratu txikiz eta berdinez zatikatzen dugun moduan: orduan ds^2; dx^2, dy^2 eta dz^2 terminoen arteko batura litzateke ($ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$) eta espazio hau "expazio laun" bat litzateke, plano bat azal laun bat den era berean. Beste hitzetan, gure intuizioak zera esaten du, espazio fisikoa, inguratzen gaituena, "launa" dela. Horrelakoa da behintzat, Riemann-ek hitz honi eman zion esanahia aplikatuz.

Benetan, halakoa al da? gure espazioa "launa" al da? Gure inguruan dagoen espazio-zati txikia launa izatea espero zitekeen gauza da; baina espazio honek azken nebulosaraino hedatzen denean, launa izaten jarraituko al du? Beste aldetik, gerta litekeen gauza da: espazioa kurbadura txiki eta jarrai batekoa izatea Unibertso osoan; eta nola gainditu duda hau? nola erantzun kuestio honi? berriro ere Riemann-en ikuspegi jeniala: esperientziaren bidez. Hau da Riemann-ek ekarri zuen "printzipio iraultzailea" eta mundu zientifiko guztia itzulipurdikatu zuena.

Euklides-en, Kant-en eta Riemann-en aurreko jakintsu guztiek espazioaren itxura launa onartu zuten, baina Riemann-ek baieztapen honen frogapena eskatzen zuen, hori horrela zenik ez bait zen besteek uste zuten bezain bistakoa. Hipotesi bat zen, experimentu bidez frogatu behar zena. Hasteko, hiru hipotesi onar zitezkeen gure espazioari buruz a) kurbadura iraunkor eta positiboa, b) iraunkor eta negatiboa, c) kurbadura zero duela (hau da, euklidearra dela, orain esaten dugun bezala). Zein da hirutan zuzen bakarra?; hori fisikari eta astronomoek erantzun behar duten galdera da. Horra hor Riemann-en aportazioa Gaussen "Geometriaren oinarrian aurkitzen diren hipotesiak" lanari; idea horiek dira Gaussen interes bizia sortu zutenak.

Riemann-en lanean badira beste idea interesgarriak, ez dago ukatzerik, hara nola espazioaren teoria kuantiko bat onartzeko posibilitatea, gaur egun fisikaren atentzioa biziki biltzen duen gaia, bera eta beste batzuk; baina gure ustez interesgarriena aipatu eta berraipatu duguna izan zen, gure espazio hirudimentsional honen kurbadura planteatzea eta esperientziaren papera galdera honen erantzunean.

Zuhur jokatuz, Riemann-ek ez zuen inongo biderik markatu erantzuna bilatzeko zein esperimentu egin beharko zirenez. Gaur egun gauden historiunetik begiratuz eta gure ezaguera posteinsteindar honetan kokaturik, experimentu hauek asmatzeko zailtasun asko gainditu behar izan zirela jakin badakigu. Normalena experimentu hauek astronomiaren desarroiloan azaltzea zenez, bide honetatik egin ziren lehenengo saioak; baina alferrik. Einsteinek frogatu zuenez grabitazioaren arazoa oso loturik zegoen Riemann-ek planteatutako problemarekin eta kurbadura iraunkor baten hipotesia alde batetara utzi beharko zela, tokian tokiko kurbadura aldakor baten espazio batez hitzegiteko (adibidez eguzkiaren inguruko espazioaren kurbadura edo Sirioaren ingurukoa handiago izango zen izararteko espazio hutsarena baino). Denborak paper handia ere jokatzen zuela frogatu zuen; beste hitzetan, experimentalki aztertu behar zena lau dimentsio dituen espazio bat zela, eta horrelaxe gertatu zen, zeren eta Einstein-ek 1920.urtean egin zituen hiru obserbazio esperimentaletan grabitazioa eta denbora erabat loturik azaltzen bait ziren.

"Unibertsoaren geometria, Fisikaren kapitulu bat da" baieztapena Riemann-en idea fundamentala da eta gaur egun guztiz justifikaturik aurkitzen da; justifikazio berdina izan du Riemann-ek bere maisu Gauss-engan izan zuen fedeak. Atzera begiratzean, geroz eta harrituagoak gelditzen gara Riemann-en eta Einstein-en maisu-lanak ikustean, eta ikaratuagoak oraindik zer nolako jeneralizazio eman ahal izan dioten Gauss-ek 1827.urtean idatzitako ekuazio sinple horri.

J. J. ELHUYAR