1. ERANSKINA

WAKE-POTENTZIALAREN FORMULAKETA DIELEKTRIKOA

Demagun inguru homogeno eta isotropo bat, ϵ ($\underset{\sim}{k}$, ω) funtzio dielektriko batez ezaugarritua, non $\underset{\sim}{k}$ eta ω eremu perturbatzailearen momentua eta frekuentzia bait dira. Erantzun linealaren teorian ("Lineal response theory") (Pines, D., eta Nozieres, P., 1966; Ritchie, 1957) v abiaduraz inguruan zehar higitzean Z_1 kargako zati puntual batek ondoko formularen bidez adierazten den potentziale eskalar bat sortzen du:

$$\phi\,(\underset{\sim}{r},\, t) = \int d^3\, \underset{\sim}{k}\ d\, \omega\ \phi\ (\underset{\sim}{k},\, \omega)\ e^{i\,(\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{r}\, -\, \omega t)} \qquad \text{(E.1)}$$

non

$$\phi\,(\underset{\sim}{k},\, \omega) = \frac{Z_1\, \delta\, (\omega - \underset{\sim}{k}\underset{\sim}{v})}{2\, \pi^2\, k^2\, \epsilon\, (\underset{\sim}{k},\, \omega)} \qquad \text{(E.2)}$$

(E.1) eta (E.2) ez dira Poisson-en ekuazioak baizik, ($\underset{\sim}{k}$, ω) Fourier-en espazioan idatzita.

Elektroi-gasaren erantzunaren ezaugarriak ϵ ($\underset{\sim}{k}$, ω) funtzio dielektriko longitudinalak dauzka. (E.1) ekuazioa, δ funtzioaren integraketa egin ondoren, honela idatz daiteke:

$$\phi\,(r,\, t) = \frac{Z_1}{\pi\, v} \int_0^{\infty} K\, J_0\, (Kb)\, dK \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i \frac{\omega}{v} \bar{z}}}{\left(K^2 + \dfrac{\omega^2}{v^2}\right) \epsilon\, (k,\, \omega)}\, d\omega \qquad \text{(E.3)}$$

k uhin-bektorea ondoko erlazioaren bidez erlazionatzen da integrazio-aldagaiekin:

$$k^2 = K^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \qquad \text{(E.4)}$$

Arazoa errazte eta argitzearren, Neelavathi, Ritchie, eta Brandt-ek elektroi-gasaren erantzuna adierazteko funtzio dielektriko lokal bat erabili zuten, funtzio dielektriko klasikoa hain zuzen,

$$\epsilon(\omega, K) = \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\eta)} \tag{E.5}$$

non $\eta \to 0^+$

Funtzio dielektriko hau erabiliz, potentzial eskalarra ondoko expresioak ematen du:

$$\phi(\underset{\sim}{r}, t) = Z_1 \frac{\omega_p}{v} \left\{ g(\underset{\sim}{r}) + 2 \sin \frac{\omega_p \tilde{z}}{v} K_o \left(\frac{\omega_p b}{v} \right) \theta(-\tilde{z}) \right\} \tag{E.6}$$

non K_o Bessel-en bigarren klaseko eta zero ordenako funtzio aldatua bait da (Abramowitz, M., eta Stegun, I. A., 1965), eta θ (z) Heaviside-ren maila funtzioa ("step function"). g ($\underset{\sim}{r}$) (1.27) ekuazioan emana dena da.

Elektroi-gasaren funtzio dielektriko kuantikoa era analitiko batez idatz daiteke (Lindhard, J., 1954). Wake-potentzialaren expresioa, hurbilketa honetan, zaila eta iluna da, eta integral bikoitza zenbakiz balioztatu behar dugu. Béraz, funtzio dielektriko hori erraztu, sinplifikatu egin dugu halako eraz non, alde batetik, elektroi-hutsune bikotean exzitazio indibidualen eta plasmoien dispertsioaren ezaugarririk oinarrizkoenak gordetzen bait ditu, eta bestetik, wake-potentzialaren kalkulaketa tratagarri bihurtzen duelarik.

Ondoko funtzio dielektrikoa erabiliko dugu:

$$\phi(\underset{\sim}{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\beta^2 k^2 + \frac{k^4}{4} - \omega(\omega + i\eta)} \tag{E.7}$$

(E.7) ekuazioak, k-ren balio txikitarako, fase ez-erlazionatuen hurbilketaren ("Random Phase Approximation", R. P. A.) bidez ateratzen denarekin bat datorren plasmoi-eremuaren dispertsio batetara eramaten gaitu:

$$\omega_k = \omega_p + \frac{3 v_F^2}{10 \omega_p} k \tag{E.8}$$

(E.7) ekuazioak, halaber; inguruaren tasun indibiduala hurbilki deskribatzen du k handitarako jokabide asintotiko egoki batez, eta batura-arauak betetzen ditu (Pines, D., 1963).

$$\int_0^\infty \omega \, \mathrm{Im}\{\epsilon(\underset{\sim}{k}, \omega)\} \, d\omega = \int_0^\infty \omega \, \mathrm{Im}\left\{\frac{-1}{\epsilon(\underset{\sim}{k}, \omega)}\right\} = \frac{\pi \omega_p^2}{2} \tag{E.9}$$

Non Im-k zati imaginarioa adierazten bait du. Ekuazioaren aipatutako ezaugarriak nahiko exaktua bihurtzen dute, gure asmoetarako, (E.7) ekuazioa ($\underset{\sim}{k}$, ω) planu osoan.

(E.7) berdintza (E.3) ekuazioan ezartzen dugu eta ondoko formula ateraz,

$$\phi(\underset{\sim}{r}, t) = \frac{Z_1}{\pi v} \int_0^{\infty} K\, dK\, J_o(Kb) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\omega_p^2)\, e^{i \frac{\omega}{v} z}}{\left(K^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\right)(\omega_k^2 - \omega(\omega + i\eta))} \qquad \text{(E.10)}$$

non $\omega_k^2 = \omega_p^2 + \beta^2 k^2 + \frac{k^4}{4}$. Bestalde, integragaien zenbakitzailean $\beta^2 k^2 + \frac{k^4}{4} - \omega(\omega + i\eta) = -\omega_p^2$ aldaketa egin dugu, ondoren, erresiduoen kalkuluaz lan egingo dugu. (E.10) ekuazioa (1.22) ekuzaio berbera da, noski.

ESKERRAK

Egileek Ibon Sarasolari eta Jacinto Iturberi eskerrona eta ezagmendua adierazi nahi lizkieke, beraien aholku eta laguntzagatik, eta lan hau argitarattzeko behar izan diren xehetasunez arduratzeagatik.