R multzoaren topologia

Dakigunez, multzoan egitura algebraikoak oso baliotsu dira multzoen propietate batzu ikasteko; baina beste klase bateko propietateak aztertzeko ez digute balio, eta horretarako egitura berri batzu, topologiko izenekoak, sartu behar dira. Horrela, espazio topologikoak eraikitzen dira eta espazio hauen artean R delakoa da erabilgarriena.

Aurrerantzean R eta beraren azpimultzoekin lan egingo dugu.

Multzo bornatuak

A multzoa goitik (edo behetik) bornatua dago, R-n beraren elementu guztiak baino handiago (edo txikiago) den elementu bat existitzen denean. Hots, $\exists\ x \in R$ m $\forall\ a \in A$, $x \geqslant a$ (edo $x \leqslant a$).

Goitik eta behetik bornatua izanez, multzoa bornatua dela esango dugu. Bedi $M \in R$. M-k E multzoa goitik (edo behetik) bornatzen badu, M E-ren goiko (edo beheko) bornea edo majorantea (edo minorante) dela esango dugu. Bornea, bornatzen duen multzoan ez dagoenean, multzo hori herstuki bornatzen duela esango dugu.

Tarteak

a, b R-ko bi elementu badira, $a < x < b$ baldintza betetzen duten x elementuen multzoa tarte ireki bat dela esaten dugu, eta (a, b) idazten.

Aldiz, $a \leqslant x \leqslant b$ baldintza betetzen denean, tartea itxia izango da, eta [a, b] idatziko dugu.

Modu berean:

$$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leqslant b\}$$
$$[a, b) = \{x \in R \mid a \leqslant x < b\}$$

tarte hauek ere defini ditzakegu, eta erdiirekiak edo erdiitxiak direla esan.

Orain arte definitu ditugun tarte guztiak bornatuak izan dira, baina badaude ezbornatuak direnak ere, adibidez:

$$(a, \infty) = \{x \in R \mid a < x < \infty\}$$
$$[-\infty, b] = \{x \in R \mid -\infty < x \leqslant b\}$$

Inguruneak

Puntu batek bere barnean duen tarte irekia, puntu honen ingurune bat da.

Bitez $x_0 \in R$ eta I tarte irekia, non x_0 I-n baitago; orduan I x_0-ren ingurune bat da.

Puntu baten inguruneen artean moeta berezi bat kontsidera dezakegu: ingurune simetrikoena, hau da: $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ forma dutenak. Tarte hauek ere B (x_0, ϵ) idatzi ohi ditugu, eta kasu honetan, x_0 ingurune honen zentrua da eta ϵ erradioa.

x_0 elementuaren ingurune bati x_0 elementua kentzen badiogu, inguru hori gutxitua dela esango dugu.

$U_1, U_2, ..., U_n$ x-en inguruneak badira, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ x-en ingurune bat da.

Frogapena

$\forall 1 \leqslant i \leqslant n \quad U_i = (a_i, b_i)$ izango da.

$a_i < x < b_i; \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ zeren $x \in U_i \; \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ eta $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = (\max a_i,$ $\min b_i)$ orduan $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ eta multzo hau tarte ireki bat da, beraz x-en ingurune bat da.

Multzo baten betatze-puntuak

Bedi E R-ren azpimultzo bat.

Definizioa

a puntuaren ingurune guztiak, a ez den E-ren elementu bat gutxienez daukatenean, a E-ren metatze-puntu bat dira. a-k ez du zergatik E-ren elementua izan behar.

Definizioaren ondorioa

a E-ren metatze puntua bada, halabeharrez, a-ren ingurune guztiek E-ren elementuen kopuru infinitua daukate.

Frogapena

Absurdura eramanez, suposa dezagun a-ren ingurune batetan, A delakoan, E-n dauden elementuen kopurua finitua dela.

Bitez $a_1, \ldots, a_n$ A-n eta E-n batera dauden elementuak a ez izanik; a eta a_i arteko distantzia d_i deituko dugu, hots, $d_i = |a-a_i|$.

Bedi $d = \min d_i$ · B (a, d) a-ren ingurune bat da, eta ez dauka E-ren elementurik, hipotesiaren aurka.

Multzo deribatua

E multzoaren metatze elementuaren multzoa, E-ren multzo deribatua da.

E' idatziko dugu:

Puntu itsatsiak

Bedi E R-ren azpimultzo bat.

a puntuaren ingurune guztiek gutxienez E-ren elementu bat daukatenean, a E-ren puntu itsatsi bat da. E-ren elementu itsatsi guztiek beraren *multzo itsatsia* osatzen dute.

Multzo baten puntu isolatuak

a puntua E-ren puntu itsatsia bada, eta ez metatzezkoa, E-ren puntu isolatua deituko dugu. Hots, a puntu isolatua da a-ren ingurune bat existitzen bada, non ingurunearen eta E-ren arteko ebakidura $\{a\}$ baita.

Barne, kanpo eta muga-puntuak

E barnean dagoen a-ren ingurune bat existitzen bada, E-ren barne puntua dela diogu.

Beste aldetik, a-ren ingurune bat, I, non $I \cap E = \emptyset$ den existitzen bada, a E-ren kanpo-puntua izango da.

a puntuaren edozein ingurunek E eta E^c delakoen elementu bana badauzka, a E-ren muga-puntua izango da.

Hau da, a puntua, batera, E eta E^c-ren puntu itsatsia denean.

R-ren multzo irekiak eta itxiak

A multzoak bere puntu bakoitzaren inguru bat gutxienez barnean duenean, irekia izango da.

Aldiz, bere metatze-puntu guztiak dauzkan multzoa itxia deituko dugu.

Teorema

E multzoa, irekia (edo itxia) bada, E^c itxia (edo irekia) da.

Frogapena

a) Bedi E multzo ireki bat. Absurdura eramanez, suposa dezagun E^c ez dela itxia. Hau da, existitzen da E^c-ren metatze puntu bat, x, non x ez baitago E^c delakoan. Orduan, x E-n egongo da; hipotesiz E irekia denez, ba dago x-en ingurune bat, U, non $U \subset E$ baita.

Halabeharrez $U \cap E^c = \emptyset$ izango da; baina hau absurdua da, zeren x E^c-ren metatze-puntua baita.

b) Suposa dezagun, orain, E itxia dela.

Bedi $x \in E^c$, orduan $x \notin E$ eta E itxia denez, x ez da izango E-ren metatze puntu bat.

Ondorioz, x delakoak badu ingurune bat, U, non $U \cap E = \emptyset$ den. Halabeharrez $U \subset E^c$ da, hots, E^c irekia da, zeren beraren edozein elementutarako aurki baikenezake ingurune bat E^c barnean egonez.

Zer dira espazio topologikoak?

Teorema

Bedi A R-ren multzo irekien familia.

i) $\emptyset \in A$.

ii) $R \in A$.

iii) A-ren edozein azpifamiliaren bildura, A-n dago. Hau da:
$A_i \in A \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in A$.

iv) A-ren edozein azpifamilia finituren arteko ebakidura, A-n dago. Hau da: $\forall i$ n $1 \leqslant i \leqslant n$, $A_i \in A \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in A$.

Frogapena

i) Nola multzo hutsak elementurik ez duen, bistakoa da $\emptyset$ irekia dela.

ii) $\forall x \in R \ \exists \ (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset R$ eta $x \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$.

iii) Bitez $\{A_i\}_{i \in I} \subset A$ eta $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, halabeharrez $\exists \ i_o \in I$ non $x \in A_{io}$ baita, A_{io} irekia denez $\exists$ U, x-en ingurune bat dena eta $U \subset A_{io} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

iv) Bitez $\{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \subset A$ eta $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.
Honelatan, ba, $x \in A_i \ \forall 1 \leqslant i \leqslant n$, A_i irekia denez, $\exists \ U_i \ni x \in U_i \subset A_i$ $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

Orduan $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, eta lehen ikusi genuenez, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ x-en ingurunea da.

R-n egin dugun bezala, edozein multzotan egin liteke; honela sortu da Matematikaren adar berri bat: Topologia.

X multzoa badugu, eta T X-en azpimultzoaren familia bat, A-k betetzen zituen lau propietateak T-k betetzen dituenean, T topologia bat dela esaten dugu. (X, T) bikotea espazio topologikoa deitu ohi da.

Borel-Lebesgueren teorema

Definizioak

Bitez E eta $\{A_i\}_{i \in I}$ · $\{A_i\}_{i \in I}$ E-ren estalki bat dela esaten dugu $E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ dugunean.

Baldin $\exists \ I_o \subset I$ non $E \subset \bigcup_{i \in I_o} A_i$, $\{A_i\}_{i \in I_o}$ $\{A_i\}_{i \in I}$-ren azpiestalki bat dela esaten dugu.

I_o multzo finitua denean, $\{A_i\}_{i \in I_o}$ azpiestalki finitua dela esango dugu.

Teorema

Bedi E R-ren azpimultzo bornatu eta itxia. E-ren tarte irekien edozein estalkitatik azpiestalki finitu bat atera liteke.

Frogapena

E multzo finitua balitz, teorema hau argi legoke.

Suposa dezagun orain, E-k elementuak kopuru infinituan dituela eta bedi A E-ren estalki bat.

E bornatua denez, $\exists$ $[a, b]$ non $E \subset [a, b]$ baita. Absurdura eramanez, suposa dezagun A-tik ezin dugula atera E-ren estalki finiturik.

Bedi a_1, $[a, b]$ tartearen erdiko puntua. Bitez $E_1 = E \cap [a, a_1]$ eta $F_1 = E \cap [a_1, b]$, nola E-k ez duen A-ren estalki finiturik, gutxienez hauetariko batek ez du ukanen, adibidez E_1.

Bedi a_2, $[a, a_1]$ tartearen erdiko puntua, lehen bezala, edo $E_2 = E_1 \cap [a, a_2]$-k edo $F_2 = E_1 \cap [a_2, a_1]$-k ez dute estalki finiturik.

Honela jarraituz, tarte-segida bat lortzen dugu: E_1, E_2, ..., eta existitzen da tarte itxiko segida bat $\{S_i\}_{i \in I}$, non $\forall i \in N$ $E_i \subset S_i$ eta luzera $S = \frac{b-a}{2}$.

Adibidez, $S_1 = [a, a_1]$, $S_2 = [a, a_2]$ edo $S_2 = [a_2, a_1]$, eta abar.

Cantor-en teoremaren bidez, $\cap S_i = \{\alpha\}$, $\alpha \in R$.

Bedi I edozein tarte ireki bat, $\alpha \in I$ izanik. Luzera $S_i \to 0$ denez, $\exists$ n m $S_n \subset I$.

S_n-ek bere barnean E_n multzoa du eta honek ez du A-ren azpiestalki finiturik. Hau dela eta, E_n-k E-ren elementuak kopuru infinituan ditu.

Beraz, α E-ren metatze-puntu bat da; eta E itxia zenez, $\alpha \in E$.

A E-ren estalki bat izanez, $\exists$ $A \in A$ m $\alpha \in A$ eta lehen bezala $\exists$ S_{n_0} m $\alpha \in S_{n_0} \subset A$.

Baina, $E_{n_0} \subset S_{n_0} \subset A$, hots, E_{n_0}-k ba du A-ren estalki finitu bat, (A) hipotesiaren aurka.

Multzo trinkoak

Definizioa

E multzoaren tarte irekiko edozein estalkitatik azpiestalki finitu bat atera badezakegu, E multzoa trinkoa deituko dugu.

Borel-Lebesgue-ren teoremaren bidez, R-ren edozein multzo itxi eta bornatu trinkoa da.

Proposizioa

E multzoa goitik (edo behetik) bornatua izanik, E multzoaren goiko (edo beheko) bornen multzoak minimo (edo maximo) bat du.

Frogapena

i) E multzo finitua bada, E-ren elementurik handiena goiko bornea da eta gainera txikiena.

ii) E-ren elementu bat E-ren goiko bornea bada, hori izango da goiko borneen minimoa.

iii) Suposa dezagun E-ren goiko borne guztiak E^c-n daudela; bedi M E-ren goiko borne bat eta $a \in E$.

Bedi $S_o = [a, M]$, $S_o \cap E \neq \varnothing$ zeren $a \in E \cap S_o$ dugun. m_o S_o-ren erdiko puntua bada, $S_o = I_o \cup J_o$ non $I_o = [a, m_o]$ eta $J_o = [m_o, M]$ baitira.

Orduan $J_o \cap E = \varnothing$ balitz, $I_o \cap E \neq \varnothing$ izan beharko luke, zeren bestela, $S_o \cap E = \varnothing$ izango bailitzateke, suposatu dugunaren aurka; eta azken kasu honetan $I_o = S_1$ izango da.

S_1 delakoak ondoko propietateak betetzen ditu:

1) $\text{Luzera } S_1 = \dfrac{\text{luzera } S_o}{2}$.

2) $S_1 \cap E \neq \varnothing$.

3) E-n ez dago S_n goitik herstuki bornatzen duen elementurik.

Metodo honi jarraituz, $\{S_1, S_2, ...\}$ tarte itxiko segida lortzen dugu, eta $\forall n \in N$ kasurako hauxe ukanen dugu:

1) $\text{Luzera } S_n = \dfrac{\text{luzera } S_{n-1}}{2} = \dfrac{\text{luzera } S_o}{2^n}$.

2) $S_n \cap E \neq \emptyset$.

3) E-n ez dago S_n goitik estriktuki bornatzen duen elmenturik.

Cantor-en teoremaren bidez, $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{\mu\}$, non $\mu \in R$ baita.

Froga dezagun μ dela E-ren majorante txikiena:

$x \in E$, $x > \mu$ izanik egongo balitz, luzera $S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ denez, $\exists\, n_o \in N$ non luzera $S_{n_o} < x - \mu$ den. Baina hau 3. propietatearen aurka doa. Beraz, μ E-ren majorante bat da.

$\alpha < \mu$, α E-ren goiko bornea izanik, existituko balitz, lehen bezala, $\exists\, n_o \in N$ non luzera $S_{n_o} < \mu - \alpha$; 2. propietatearen aurka beraz.

Honela, frogaturik dago μ E-ren majorante txikiena dela.

Simetrikoki frogatzen da ezen behetik mugatua dagoen multzo batek minorante bat,· m, duela.

Definizioak

E multzoaren goiko bornerik txikiena, μ, goiko muturra deitzen dugu eta $\mu = \sup E$ idazten.

E multzoaren beheko bornerik handiena, m, beheko muturra deitzen dugu eta $m = \inf E$ idazten.

Bolzano-Weierstrass-en teorema

Bedi A R-ren azpimultzo infinitu eta bornatu bat; orduan, $A' \neq \emptyset$, hau da, A-k ba du gutxienez metatze puntu bat.

Frogapena

Absurdura eramanez, $A' = \emptyset$ dela suposa dezagun; halabeharrez, A itxia da eta, hipotesiz mugatua denez, trinkoa da.

Edozein multzoren elementu guztiak, berarekiko itsatsiak dira. A-ren metatze-puntuak ez izanik, punto isolatuak dira.

Beraz, $\forall\, x \in A\ \exists\, V_x$, x-en inguru irekia dena, non $A \cap V_x = \{x\}$ den. Argi dago $\{V_x | x \in A\}$ A-ren estalki irekia dela eta A trinkoa izanik. Borel-Lebesgue-ren teoremaz, azpiestalki finitu bat aurki dezakegu, baina, hau ezinezkoa da, A infinitu baita.

Hots, $A' \neq \emptyset$ izango da, f.n.g.l.

J. M. GOÑI