INTEGRAZIO NUMERIKOA

J. A. MAIZ

Sarrera:

Funtzio bat integratu beharrean aurkitzen garenean, ahal badugu, analitikoki egiten dugu; hots, funtzioaren integralea aurkitzen dugu eta, ararteko ertzetan zenbat balio duen ikusi ondoren, azkenburuan funtzioak balio duenari abiaburuan balio duena kentzen diogu.

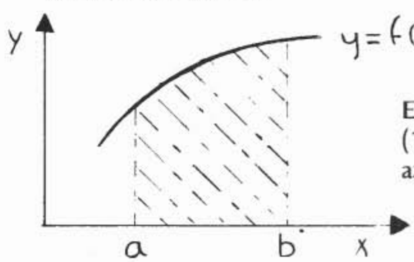
Hala ere, batzutan integrale funtzioa aurkitu ezinik ibiltzen gara, edo funtzio hau oso konplexua da.

Orduan, integrazio numerikoa erabiltzen dugu Integralearen baliora hurbiltzeko.

Har dezagun $I = \int_a^b f(x)\, dx$ integralea (1)

a eta b mugatuak direla.
eta f(x) etengabea $[a, b]$ ararte itxian.

Ararte honen ertzak mugagabeak badira, edo ararte barruan bakartasunik balego, (1)ek duen formara eraman behar ditugu lehendabizi, kalkulu infinitesimalak agintzen duen bezala.



Irudia 1

Egingo duguna hauxe da:
(1) integraleak, dakigunez, kurba azpian dagoen azala ematen digu a eta b ertzen tartean.

Hurbiltze hau, ikusiko dugunez, handiagoa izango da, neurketa ararte txikiagotan egin ahala.

Horregatik, [a, b] artartea beste ararte txikiagoetan biderkatu beharrean, aurkituko gara hurbiltze handiagoa lortzearren.

Biderkaketa hau nola egiten dugun kontutan harturik , bi metodo klase dauzkagu:

1.– Arartcak aurretik aukeratzen ditugu. Arartcak berdinak aukeratzen dira, edo ertzetan funtzioak zenbat balio duen erraz jakin litekeen lekutan.

2.– Ararteak ez dira edonola hartzen, nahi dugun prezisioa kontutan hartuz baizik.

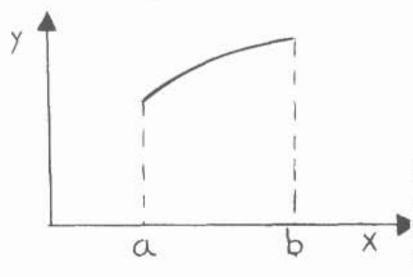
Lehendabiziko metodoaz eginak bakarrik ikusiko ditugu:

Metodo honetaz litezkeenak honako hauk ditugu:

(a) –Trapezioaren erregela:

Egin behar dugun integralea,

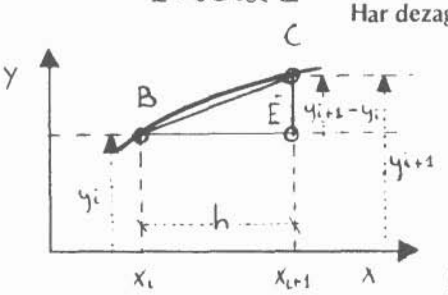
$$I = \int_a^b f(x) \quad dx \quad \text{da.}$$



Irudia 2

a,b ararte itxia, n ararte berdinetan zatitzen dugu. Bakoitzak izango duen zabalgunea $h = \frac{b-a}{2}$ izango da.
arartecn ertzak, jarraiko a, x_1 , x_2 ,... x_n -1 , b izango dira.

Har dezagun orain ararte hauetako bat.



Irudia 3

Neurtu nahi dugun azala

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cdot dx$$

Lauki zuzen eta triangeluen azalen batuketa hartuko dugu azalaren balio bezala.

Garbi azaltzen da, orduan, zenbat eta txikiagoa izan arartea hainbat eta hurbiltze handiagoa lortuko dugula. Honek esan nahi du, lehen aipatu dugunez, zenbat eta ararte gehiagotan zatitzen dugun a,b arartea, hainbat eta hurbiltze handiagoa lortzen dugula.

$\left[x_i , x_{i+1}\right]$ ararteareen azala, hortaz,

$$I_i \simeq h \cdot f(x_i) + \frac{h\left[f(x_{i+1}) - f(x_i)\right]}{2} \quad \text{izango da.}$$

$$I_i \simeq h \cdot y_i + \frac{h\, y_{i+1}}{2} - \frac{hy_i}{2} = \frac{1}{2} h\,(y_i + y_{i+1})$$

$$\left.\begin{aligned} f(x_i) &= y_i \\ f(a) &= y_o \\ f(b) &= y_n \end{aligned}\right\} \quad \text{deitu dugularik.}$$

Ararte guztietan berdin egiten badugu.

$$I = \sum_{i=o}^{i=n} I_i \simeq \frac{1}{2}\, h\,(y_o + 2y_1 + 2y_2 + \dots\dots\dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Zatiketan egin ditugunararteak berdinak ez badira

$$I_i = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\left[f(x_{i+1}) + f(x_i)\right]$$

eta $I = \frac{1}{2}(y_o + y_1)(x_1 - x_o) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + \dots\dots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)(x_n - x_{n-1}) =$

$$\frac{1}{2}\left[y_o(x_1 - x_o) + y_1(x_2 - x_o) + y_2(x_3 - x_1) \;\dots\dots\; + y_{n-1}(x_n - x_{n-2}) + y_n(x_n - x_{n-1})\right]$$

$$\left.\begin{aligned} a &= xo \\ b &= xn \end{aligned}\right\} \text{deitu dugularik.}$$

Trunkamentuzko errorea

Neurtu behar genuen azalaren ordez trapezioaren azalak neurtu ditugu, baina bi azal hauk ez dira berdinak eta errorea zenbatekoa den jakin nahi genuke.

Hortarako, integratzeko daukagun funtzioa Tayloren segidan desarroilatuko dugu, ararteen ertzetan.

Gure $y = f(x)$ funtzioa xi puntuan desarroilatzen badugu.

$$y = y_i + (x - x_i)\,y'_i + \frac{(x-x_i)^2}{2}\,y''_i + \ldots\ldots$$

eta x_{i+1} puntuan

$$y = y_{i+1} + (x - x_{i+1})\cdot y'_{i+1} + \frac{(x-x_{i+1})^2}{2}\cdot y''_{i+1} + \ldots$$

baina $x_{i+1} - x_i = h$ da, ararte guztiak berdinak badira, eta

$$y = y_{i+1} + (x - x_i - h)\cdot y'_{i+1} + \frac{(x - x_i - h)^2}{2}\,y''_{i+1} + \ldots$$

Bi hauen bataz besteko balioa zera da

$$y = \frac{y_{i+1} + y_i}{2} + \frac{x - x_i}{2}\,(y'_{i+1} + y'_i) - \frac{h}{2}\cdot y'_{i+1} + \frac{(x - x_i - h)^2}{2}\,(y''_{i+1} + y''_i) - $$

$$+ \frac{x - x_i}{2}\,(y'_{i+1} + y_i) - \frac{h}{2}\,y'_{i+1} +$$

Orain integratu egin beharko dugu, gure balio hurbildua honekin neurtzeko.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y\,dx = \frac{h}{2}\,(y_{i+1} + y_i) + \frac{h^2}{2}\,(y'_{i+1} + y'_i) + \frac{h^2}{4}\,(y'_{i+1} + y_i) - \frac{h^2}{2}\,y'_{i+1} + \frac{h^3}{12}\,(y''_{i+1} + y''_i) -$$

$$- \frac{h^3}{4}\,y''_{i+1} + \frac{3}{4}\,y''_{i+1} + \ldots = \frac{h}{2}\,(y_{i+1} + y_i) - \frac{h^2}{4}\,(y'_{i+1} - y'_i) + \frac{h^3}{12}\,(y''_{i+1} + y_i) + \ldots$$

Hau da Integralearen benetazko balioa, nahi dugun prezisioz neurtua, horretarako behar hainbat termino hartuz.

Trapezioaren erregelaren bidez lortzen dugun balioa.

$$I = \frac{h}{2}\,(y_{i+1} + y_i) \quad \text{da.}$$

Horregatik, zera esan dezakegu:

Trukamentuzko errorea zera izango da.

$$E_{ti} = -\frac{h^2}{4}\,(y'_{i+1} - y'_i) + \frac{h^3}{12}\,(y''_{i+1} + y''_i) + \ldots\ldots$$

h txikia denean, $h^3 \ll h^2$ izaten da.

Bestalde, yi+1 Taylorren segidaz desarroilatzen badugu, yi ren iguruan eta h^2 bidez biderkatuz.

$$h^2 \cdot y'_{i+1} = h^2 \cdot y'_i + h^3 \cdot y''_i + \ldots$$

Ikusten dugunez, lehendabiziko terminoan goimailako deribatuek badute beren eragina.

Orduan, eta h nahiko txikia hartzen badugu, y'' eta goragoko mailakoak ia konstante edo zero izango dira edozein funtziorentzat.

Lehendabiziko terminoan, beste terminoetako goimalako deribatuek egiten duten eragina kontutan hartzeko, koefiziente jeneriko bat jarriko diogu.

$$E_{ti} = k \cdot h^2 \cdot (y'_{i+1} - y'_i) \qquad \text{Osoaz} \qquad E_t = \sum_{i=0}^{i=n-1} E_{ti} \quad \text{delarik}$$

k konstante honek ez dakigu zenbat balio duen, baina funtzio guztientzat berdina da.

Konstante honek zenbat balio duen jakiteko, erraz integra liteken funtzio bat hartuko dugu.

$y = x^2$ adibidez funtzio honen integralea

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} x^2 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{x_{i+1}^3}{3} - \frac{x_i^3}{3} = \frac{(x_i+h)^3}{\varepsilon} - \frac{x_i^3}{3} =$$

$$= x_i^2 \cdot h + x_i \cdot h^2 + \frac{h^3}{3}$$

Trapezioaren formulaz egin izan begenu

$$y_i = x_i^2$$

$$y_{i+1} = (x_i + h)^2$$

$$I_i = \frac{1}{2} h\left[x_i^2 + (x_i + h)^2\right] + E_{ti} = \frac{1}{2} h\left[x_i^2 + x_i^2 + 2x_i \cdot h + h^2\right] = h x_i^2 + x_i \cdot h^2 + \frac{h^3}{2} + E_{ti}$$

Trukamentuzko errorea

$$E_{ti} = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} = -\frac{h^3}{6}$$ izango da.

$$E_{ti} \simeq k h^2 \left[2(x_i + h) - 2x_i\right] = k\, h^2 [2h] = 2\, k\, h^3 \Rightarrow k = -\frac{1}{12}$$

Orduan, generalean, trukamentuzko errorea zera da:

$$E_{ti} \simeq -\frac{1}{12} \cdot h^2 \cdot \left(y'_{i+1} - y'_i \right)$$

Generalizazioa: Simpson eta Weddleren erregelak

$y = f(x)$ funtzioa baldin badugu eta funtzio hau taulaz agertzen bazaigu (taula hori bakarrik ezagutzen dugulako edo eta, oso konplexua izanik, balore horik kalkulatu ditugulako):

Adibidez:

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$
x_4	$f(x_4)$

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
x_0	$f(x_0)$				
		$\Delta f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$		
		$\Delta f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)$	
x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$		$\Delta^4 f(x_0)$
		$\Delta f(x_2)$		$\Delta^3 f(x_1)$	
x_3	$f(x_3)$		$\Delta^2 f(x_2)$		
		$\Delta f(x_3)$			
x_4	$f(x_4)$				

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
1.0	5				
		2			
1.2	7		2		
		4		3	
1.4	11		5		-1
		9		2	
1.6	20		7		
		16			
1.8	36				

Irudia 4 .

Lehendabiziko mailako "diferentzia mugatua" "$\Delta f(x_i)$" honela definitzen dugu

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

Bigarren mailako diferentzia mugatua bezala definitzen dugu, eta abar.

$$\Delta^2 f(x_i) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)$$

4. irudian ikusten den taula egin dezakegu hortaz . Froga liteke, $y=f(x)$ Newtonen diferentzia mugatuen formularekin desarroila litekeela. Honela:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{n} \Delta f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} \Delta^2 f(x_0) +$$

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6h^3} \Delta^3 f(x_0) + \ldots..$$

Ararte guztiak berdinak hartzen ditugula: $x_{i+1} - x_i = h$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx = \int_{x_0}^{x_0 + nh} f(x) \cdot dx$$

eta $x = x_0 + th$ aldagai aldaketa eginik,

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx = h \int_0^n \left[f(x_0) + t\Delta f(x_0) + \frac{t(t-1)}{2} \Delta^2 f(x_0) + \frac{t(t-1)(t-2)}{6} \Delta^3 f(x_0) + \ldots \right] dt =$$

$$h \left[n\, f(x_0) + \frac{n^2}{2} \Delta f(x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} \right) \Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2 \right) \Delta^3 f(x_0) + \ldots \right]$$

Formula hau generala da:

Honela:

$n = 1$ egin da eta lehendabiziko baino maila handiagoko terminoak kontutan hartzen ez ditugula.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = h \left[f(x_0) + \frac{1}{2} \Delta f(x_0) \right] = h \left[f(x_1) - f(x_0) \right] = \frac{1}{2} h \left[f(x_0) + f(x_1) \right]$$

berdin izango litzateke.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = h \left[f(x_1) + \frac{1}{2} \Delta f(x_1) \right] = h \left[f(x_1) + \frac{1}{2} \Big(f(x_2) - f(x_1) \Big) \right] =$$

$$\frac{1}{2} h \left[f(x_1) + f(x_2) \right]$$

eta

$$\int_{x_o}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_o}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}\,h\left[f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Hau da trapezioaren erregela

$n = 2$ egiten badugu, eta bi baino maila handiagoko diferentzia mugatuak kontutan hartzen ez ditugula:

$$\int_{x_o}^{x_o+2h} f(x)\,dx = h\left[2\,f(x_o) + 2\Delta f(x_o) + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 2\right)\Delta^2 f(x_o)\right] =$$

$$h\left[2f(x_o) + 2f(x_1) - 2f(x_o) + \frac{1}{3}\left(f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_o)\right)\right] = \frac{h}{3}\left[f(x_o) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$\left[x_2, x_2+2h\right]$ artearentzat berdin egingo dugu.

$$\int_{x_2}^{x_2+2h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] \quad \text{eta abar.}$$

$n+1$ puntu izanik (n bikoiti) formula hauk denak batuko ditugu $\int_{x_o}^{x_n} f(x)\,dx$ ek zenbat balio duen ikusteko

$$\int_{x_o}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_o) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) \quad \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Erregela honi Simpsonen Erregela deitzen zaio; eta bere trunkamentuzko errorea kalkula liteke, honako hau gertatzen delarik.

$$E_t \simeq -\frac{h^4}{180}(x_n - x_o)\, f^{IV}(\xi) \qquad x_o < \xi < x_n \qquad \text{izanik.}$$

$f^{IV}(\xi)$ handiena $[x_o, x_n]$ arartean M baino txikiagoa dela baldin badakigu

$$E_t \leqslant -\frac{h^4}{180}(x_n - x_o)\, M$$

$n = 6$ hartuz gero, berriz, eta 6 baino goragoko mailako diferentzia mugatuak kontutan hartu gabe,

$$\int_{x_o}^{x_o+6h} f(x)\,dx = h\left[6f(x_o) + 18\Delta f(x_o) + 24\Delta^3 f(x_o) + \frac{123}{10}\Delta^4 f(x_o) + \right.$$

$$\left.\frac{33}{10}\Delta^5 f(x_o) + \frac{41}{140}\Delta^6 f(x_o)\right]$$

$\Delta^6 f(x_o)$ren koefizientea $\frac{41}{140}$ da; eta, honen lekuan $\frac{3}{10}$ jarriz gero, egiten dugun errorea $h\cdot\left(\frac{3}{10} - \frac{41}{140}\right) = \frac{h}{140}$ da;

honela jarriko dugu.

$\Delta f(x_o), \Delta^2 f(x_o), \ldots$ en lekuan bere balioa jarriz

$$\int_{x_o}^{x_o+6h} f(x)\,dx = \frac{3}{10} h \left[f(x_o) + 5f(x_1) + f(x_2) + 6f(x_3) + f(x_4) + 5f(x_5) + f(x_6)\right]$$

berdin izango litzateke

$$\int_{x_6}^{x_{12}} f(x)\,dx = \frac{3}{10} h \left[f(x_6) + 5f(x_7) + f(x_8) + 6f(x_9) + f(x_{10}) + 5f(x_{11}) + f(x_{12}) \right]$$

orduan (n, 6ren multiploa baldin bada).

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{3h}{10} \left[f(x_0) + 5f(x_1) + f(x_2) + 6f(x_3) + f(x_4) + 5f(x_5) + 2f(x_6) + 5f(x_7) + \ldots\ldots + \right.$$

$$\left. 2f(x_{n-6}) + 5f(x_{n-5}) + f(x_{n-4}) + 6f(x_{n-3}) + f(x_{n-2}) + 5f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

Formula hau Weddleren formula da.

Ikus dezagun orain adibide praktiko bat.

Kalkula dezagun $\int_4^{5,2} \ln x \cdot dx$

Lehendabiziko puntu batzuk hartu eta $\ln x$ puntu horietan zenbat balio duen jakin dezagun.

Honekin taula egiten badugu

x	$\ln x$
4,0	1,38629436
4,2	1,43508453
4,4	1,48160454
4,6	1,52605630
4,8	1,56861592
5,0	1,60943791
5,2	1,64865863

$h = 0,2$

Trapezioaren formularekin		1,827655140
Simpsonen	"	1,82784726
Weddleren	"	1,82784741
Egiazko balioa		1,82784741

□ □ □