BI EZEZAGUNETAKO EKUAZIOAK. EKUAZIO SISTEMAK (III)

J. M. GOÑI

I.– BI EZEZAGUNETAKO EKUAZIOA.

Aurreneko artikuluetan eraman dugun bide logikoaren jarraipena izan nahi luke gaurko lan honek. Orain arte ekuazioa proposizio bat bezala kontsideratu badugu, hemendik aurrera ikuspegi berdinetik jarraituz lehenago esana osatu eta borobildu nahi genuke.

Ezezagun bateko ekuazioa, bere terminoen artean ezezagun bat duen proposizio bat bezala definitu genuen moduan berean, oraingo honetan bi ezezagunetakoa, bi ezezagun dituen proposizio bezala definitzea dirudi egokiena.

"............. da Gipuzkoako hiriburua", $E = \{$Donostia, New York, Bilbo$\}$ ezezagun bateko ekuazioa.

"...............da............ko hiriburua", $E_1 \times E_2$, $E_1 = \{$Donostia, New York, Bilbo$\}$ $E_2 = \{$Gipuzkoa, Araba, Bizkaia$\}$ bi ezezagunetako ekuazioa.

Kontu egin, gaurko kasu honetan $E_1 \times E_2$ multzoa dela erroak bilatzeko ematen dena; multzo hau bikoteaz osaturiko multzoa dugu eta hala izan behar du bi leku huts bait ditugu ekuazioan ordezkatzeko.

2.– EKUAZIOA ETA ERROA

Erroa, ekuazioa proposizio zuzena egiten duen $E_1 \times E_2$ multzoko bikotea da; bikote esan dugu eta halaxe da, bi ezezagunetako ekuazioetan elementu pare bat behar bait dugu proposizioa osatzeko.

(Donostia, Gipuzkoa) –– "Donostia da Gipuzkoako hiriburua" – proposizio hau zuzena da eta beraz (Donostia, Gipuzkoa) bikotea, ekuazioaren erroa dugu.

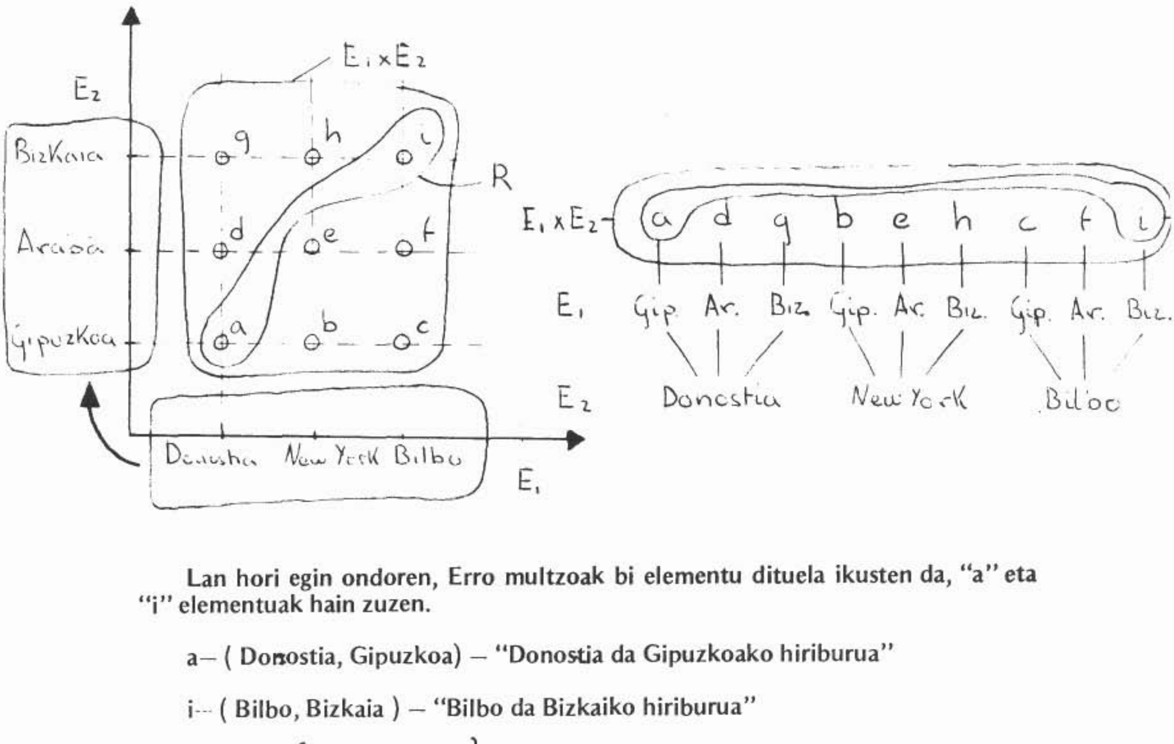
(New York, Araba) –– "New York da Arabako hiriburua" – proposizio hau ez da zuzena, eta beraz (New York, Araba) bikotea ez da ekuazioaren erroa.

Ekuazio baten erro guztiak biltzen dituen multzoari ekuazioaren ERRO MULTZOA deitzen zaio; nolanahi ere, ERRO MULTZO hau $E_1 \times E_2$ multzoaren azpimultzo bat izango da beti.

$$R \subset E_1 \times E_2$$

3.– ERRO MULTZOA (R)

Erro multzoa $E_1 \times E_2$ multzoaren azpimultzo bat izango denez gero, $E_1 \times E_2$ multzo hau osatu beharko dugu.



Lan hori egin ondoren, Erro multzoak bi elementu dituela ikusten da, "a" eta "i" elementuak hain zuzen.

a– (Donostia, Gipuzkoa) – "Donostia da Gipuzkoako hiriburua"

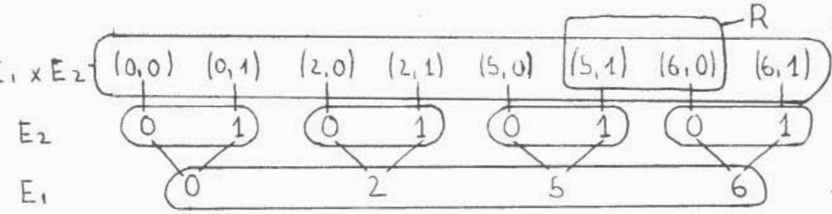
i– (Bilbo, Bizkaia) – "Bilbo da Bizkaiko hiriburua"

$E_1 \times E_2 = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$

$R = \{a,i\}$

Kontsidera ditzagun $x + y = 6$ bi ezezagunetako ekuazioa eta $E_1 = \{0,2,5,6,\}$ $E_2 = \{0,1\}$, eta $E_3 = \{5,4,6\}$ multzoak.

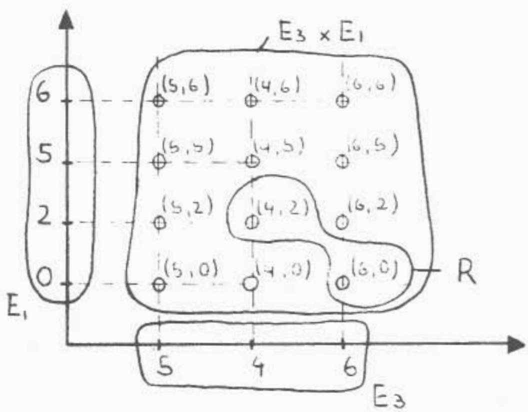
+ b) Bila dezagun ekuazio honen "erro multzoa" $E_3 \times E_1$ multzoan, $x \in E_3$, $y \in E_1$ direlarik.



(0,0) – 0+0 = 6
(0,1) – 0+1 = 6
(2,0) – 2+0 = 6
(2,1) – 2+1 = 6
(5,0) – 5+0 = 6
(5,1) – 5+1 = 6
(6,0) – 6+0 = 6
(6,1) – 6+1 = 6

$R = \{(5,1), (6,0)\}$

a) Bila dezagun ekuazioaren beraren "erro multzoa" $E_1 \times E_2$ multzoan, $x \in E_1$ eta $y \in E_2$ direlarik.



(5,0) 5+0 = 6
(5,2) 5+2 = 6
(5,5) 5+5 = 6
(5,6) 5+6 = 6
(4,0) 4+0 = 6
(4,2) 4+2 = 6
(4,5) 4+5 = 6
(4,6) 4+6 = 6
(6,0) 6+0 = 6
(6,2) 6+2 = 6
(6,5) 6+5 = 6
(6,6) 6+6 = 6

$R = \{(4,2), (6,0)\}$

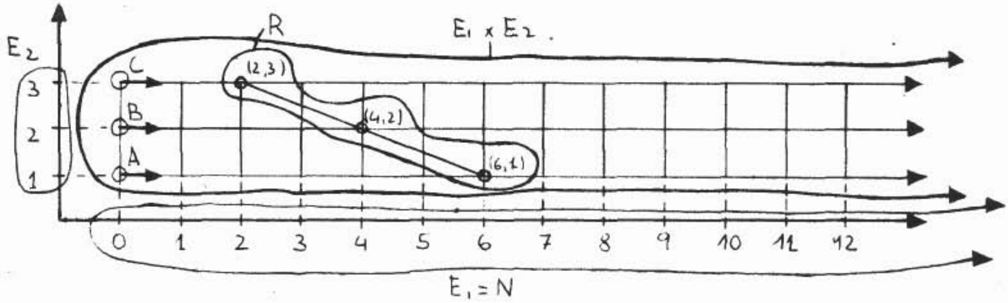
" $x+y=6$ $E_1 \times E_2$ multzoan" – $R = \{(5,1), (6,0)\}$

" $x+y=6$ $E_3 \times E_1$ multzoan" – $R = \{(4,2), (6,0)\}$

Goiko adibide honetan, ekuazio berdinari "erro multzo" desberdinak dagozkiola, segun zein multzotan bilatzen den, argi ikus daitekeen propietatea duzu.

3 .1 E multzo bat bukaezina denean.

Demagun " $x + 2 . y = 8$", ekuazioa eta bila dezagun bere erro multzoa $E_1 \times E_2$ multzoan, $E_1 = N$ eta $E_2 = \{1, 2, 3\}$, $x \in E_1$ eta $y \in E_2$ direlarik.



$E_1 \times E_2$ multzoa osatzerakoan, hau ere bukaezina dela konturatu gara eta honek zailago egiten du erro multzoa bilatzea; zailago, bikote posible guztiekin aproba egitea ezinezkoa bait da. Arazo hau konpontzeko A puntuan hasten den zuzenerdi horizontal hori aztertzea proposatzen dugu.

Ondo begiraturik, zuzenerdi horren puntu guztien bigarren koordenatua 1 da; hau da, puntu guzti horietan $y = 1$ dela zihurta dezakegu. Hori hala izanik.

$x + 2y = 8$, $E_1 x E_2$ ($E_1 = N$ $E_2 = \{1,2,3\}$) ekuazioa
$x + 2 = 8$ $E_1 = N$ ekuazioan bihurtzen da A zuzenerdi horretarako
$x = 6$
$6 \in N$, beraz, erro egokia

A zuzenerdian, $x + 2.y = 8$ ekuazioaren erro bakarra (6,1) dela baiezta dezakegu bildurrik gabe.

Azter dezagun orain B zuzenerdia; zuzenerdi honen puntu guztietan y-ren balioa 2 da.

$x+2y = 8$; $E_1 x E_2$ ekuaziotik
$x+2.2 = 8$; $E_1 = N$ Ekuaziora pasatzen gara B zuzenerdirako
$x+4 = 8$
$x = 4$
$4 \in N$ beraz, erro egokia.

B zuzenerdian dagoen erro bakarra (4,2) bikotea da.

Begira dezagun orain C zuzenerdia ; $y = 3$

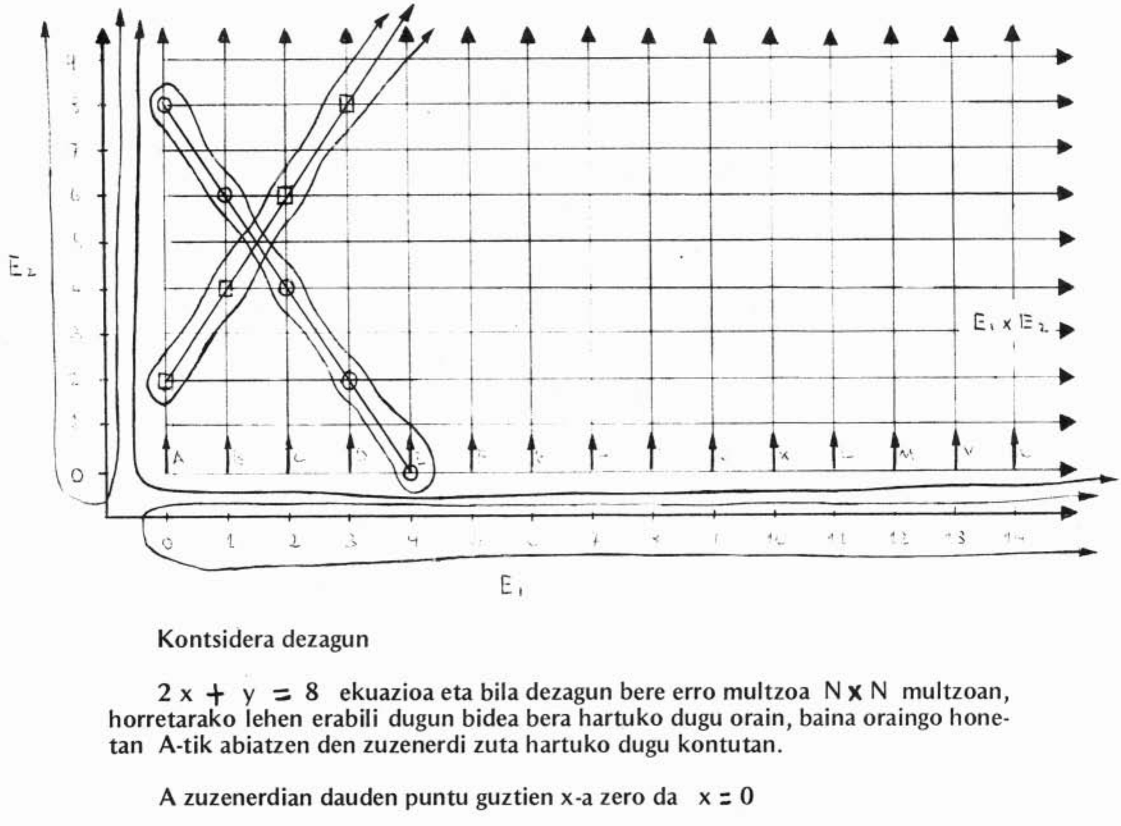
$x+2 . y = 8$; $E_1 x E_2$
$x+2.3 = 8$; E_1
$x+6 = 8$; E
$x = 2$
$2 \in N$

C zuzenerdian dagoen erro bakarra (2,3) bikotea da.

Baina, A, B, eta C zuzenerdi horietan $E_1 \times E_2$ multzoko elementu guztiak daude kokaturik, beraz erro gehiagorik ez dagoela baiezta dezakegu zihurtasun osoz.

$R = \{(6,1), (4,2), (2,3)\}$

3.2 E_1 eta E_2 multzoak bukaezinak direnean.



Kontsidera dezagun

$2x + y = 8$ ekuazioa eta bila dezagun bere erro multzoa $N \times N$ multzoan, horretarako lehen erabili dugun bidea bera hartuko dugu orain, baina oraingo honetan A-tik abiatzen den zuzenerdi zuta hartuko dugu kontutan.

A zuzenerdian dauden puntu guztien x-a zero da $x = 0$

$2.x+y = 8$; $N \times N$, ekuaziotik
$0+y = 8$; N, ekuaziora pasatzen gara (0,8)
$y = 8$
$8 \in N$, beraz, egokia

B zuzenerdian $x = 1$ da.

$2.x+y = 8$; $N \times N$.
$2.1+y = 8$; N. (1,6)
$y = 6$
$6 \in N$

C zuzenerdian $x = 2$ da.

$2.x+y = 8$; $N \times N$
$2.2+y = 8$; N. (2,4)
$y = 4$
$4 \in N$

D zuzenerdian $x = 3$

$2.\ x + y = 8 \ ;\ N \times N.$

$2.\ 3 + y = 8 \ ;\ N.$ (3,2)

$y = 2$

$2 \in N$

E zuzenerdian $x = 4$

$2.\ x + y = 8 \ ;\ N \times N.$

$2.\ 4 + y = 8 \ ;\ N.$ (4,0)

$y = 0$

$0 \in N$

F zuzenerdian $x = 5$

$2.\ x + y = 8 \ ;\ N \times N.$

$2.5 + y = 8 \ ;\ N.$

$y = -2$

$-2 \notin N$

Beraz F zuzenerdian ez dago errorik

G zuzenerdian $x = 6$

$2.\ x + y = 8 \ ;\ N \times N.$

$2.\ 6 + y = 8 \ ;\ N.$

$y = -4$

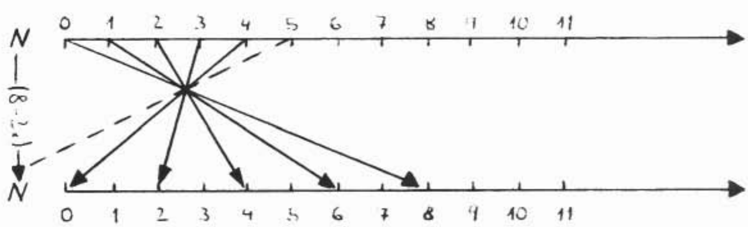
$-4 \notin N$

Beraz G zuzenerdian ez dago errorik

Azken bi ariketa hauk ikusi ondoren, erro gehiagorik ez dela izango pentsatzen dugu, baina nola egon zihur?

$2.\ x + y = 8$ eta $y = 8 - 2 . x$ berdintzak baliokideak dira, beraz berdin zaigu bataren nahiz bestearen erroak bilatzea.

✓ Kontsidera dezagun $N \to N$ $y = 8 - 2. x$ funtzioa, eta aldameneko daiagrama honek, x- a 4 baino handiagoa bihurtzen denean y- z baliorik gabe gelditzen dela, argi erakusten du.



Bi ezezagunetako ekuazioa, funtzio bezala kontsideratze hau oso interesgarria da multzoak bukaezinak direnean.

Beraz ekuazio honetako R multzoa zera da:

$R = \{(0,8), (1,6), (2,4), (3,2), (4,0)\}$

Ez da pentsatu behar R multzoak finitua izan behar duenik, ezin bestean; batzutan bukaezina izaten da eta erro guztiak bilatzea ezinezkoa: horrelako kasuetan funtzio modura pasatzea oso egokia izaten da.

$2x - y = 2$; $N \times N$ ekuaziotik $- N \to N$ $y = 2x-2$ funtziora.

x	y	(x,y)
0	2	(0,2)
1	4	(1,4)
2	6	(2,6)
3	8	(3,8)
4	10	(4,10)

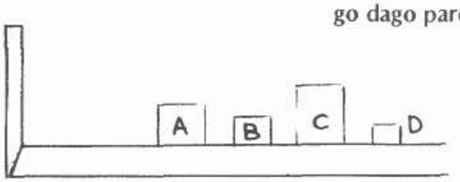
$R_s \{(0,2), (1,4), (2,6), (3,8), (4,10), ... \}$

4. – EKUAZIO SISTEMAK

Multzo berdinean bere erro multzoak definiturik dituen ekuazio parea da ekuazio sistema.

Adibidez:

"..... handiagoa da....... baino" eta"....... gertuago dago paretatik....... baino".



Ekuazio parea, $E \times E$ multzoan,
$E = \{A,B,C,D\}$

edo "$x+2y = 6$" eta "$2x+y = 6$" ekuazioak $N \times N$ multzoan.

5.– EKUAZIO SISTEMEN ASKAKETA

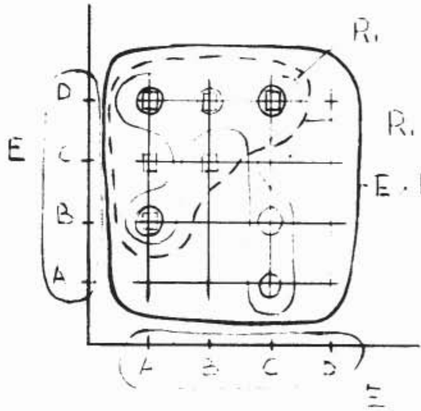
- Ekuazio sistema baten erroa, adibidearen bi ekuazioen erroa dugu. Definizio honi jarraituz, ekuazio bakoitzaren erro multzoa bilatu ondoren bi multzo horien arteko ebaketa egin beharko genuke sistemaren erro multzoa aurkitzeko.

Saia gaitezen 4. puntuan zehaturiko lehenengo sistema askatuz.

Horretarako, eta beti egiten dugun bezala, $E \times E$ osatu beharko da lehen-lehenik.

"..... handiagoa da....... baino"
"..... gertuago dago paretatik..... baino"
$E \times E$
$E = \{A, B, C, D\}$

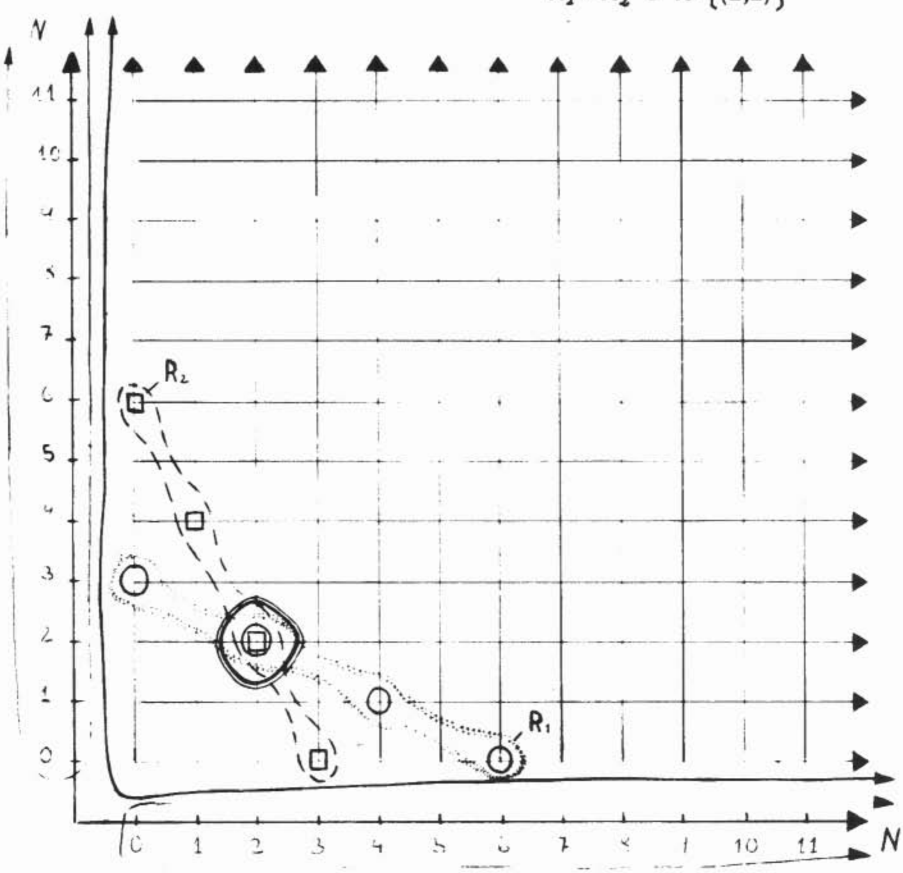
R_1 eta R_2 osatzeko egin behar diren lanetaz, ihardun dugu lehenago eta ez dugu berriro egingo.



$R_1 = \{(A,B), (A,D), (B,D), (C,A), (C,B), (C,D)\}$
$R_2 = \{(A,B,), (A,C), (A,D), (B,C,),(B,D), (C,D)\}$
Sistemaren erro multzoa
$R_1 \cap R_2 = R = \{(A,B), (A,D), (B,D),(C,D)\}$
R multzo hau "hau.... haundiago da.... baino eta.... gertuago dago paretatik...... baino" proposizio konposatuaren erro multzoa da.

$x+2y = 6$ eta $2x+y = 6$; $N \times N$.

$R_1 = \{(0,3),(2,2),(4,1),(6,0)\}$
$R_2 = \{(6,0), (1,4),(2,2),(3,0)\}$
sistemaren erro multzoa
$R_1 \cap R_2 = R = \{(2,2)\}$



Bukaera hau, gai honen hasiera izan ohi da, eta hemendik aurrera jarraitzen den bideán oso ezaguna da, eta beraz gurea hemen bukatzen da.

Hiru izan dira, besteren artean, helburu nagusiak lan honetan.

a) Logikaren erabilpena zabaltzea: askotan teorikoki ukituriko gaiak (proposizioak, zuzentasuna, okertasuna, egi taulak...) praktikan erabiltzea.

b) Multzo teoriaren erabilpena zabaltzea: goiko arrazoia bera aipatuko nuke, hots, askotan aipaturiko gaiak praktikan erabiltzea.

c) Posibilitate metodologikoak hobetzea:metodologia on batek zera esaten du, ikasleari berari asmatzeko aukera eman behar zaiola; baina askotan gaia bera da oztopo, erabiltzen den teoria kontzeptu abstraktuz josirik bait dago. Ikasleak jarraitu behar duen bidea erraztea eta ahalik eta salto logikorik gutien duen teoria lantzea oso lagungarria izaten da metodologia on batetarako.

○ ○ ○