BERDINTZA ETA EKUAZIOA (II)

J. M. GOÑI

Ekuazioak aztertzeko berdintza ikusi beharra zegoela esaten genuen aurreko lanean, eta egin ere hala egin dugu; laburpen gisan, hona hemen han aipaturiko idearik interesgarriena:

- Berdintza berdintasun erlazioaren adierazpena da, eta beraz ERLAZIO bat bezala erabili behar dugu.
- Berdintza proposizio moduan ulertzen dugu.
- Erlazio honen definizioa era axiomatiko batetan egiten da eta ondorioz lortzen dira beste berdintzen zuzentasuna ala okertasuna.
- Berdintzen arteko baliokidetasun erlazioa definitu genuen, ondorengo bi puntu hauetan finkaturik:
    - Zenbaki berdinez osaturik egotea.
    - Biak zuzenak izatea.
- Berdintzak bi alde ditu eta alde bakoitzaren esannahi matematikoa ezagutzea badu bere garrantzia.

Oraingo honetan ekuazioak ditugu aztergai eta horretan saiatuko gara. Hala ere ekuazioak ukitu baino lehen, egin ditzagun ondorengo bi ariketa hauk.

Har dezagun M (3,4,7,+ , –, 0) multzoa eta saia gaitezen, berdintza zuzenak sortuz, multzo honetako zenbakiak behin bakarrik erabiliz soilik idazten.

$3+4=7$	$4=7-3$
$4+3=7$	$3=7-4$
$(4+3)-7=0$	$0=(7-3)-4$
$(3+4)-7=0$	$0=(7-4)-3$

Berdintza guzti honetan lege berdina azaltzen da, "Alde batetan batzen ari dena beste aldera pasatzerakoan kentzaile bihurtzen dela; eta alderantziz: hau da, alde batetan kentzaile dena beste aldera pasatzerakoan batugai bihurtzen dela" legea alegia.

$$4+3=7$$
$$4=7-3$$
$$0=(7-3)-4$$

Propietate hau erabiliz, eta ondo erabiliz, berdintza batetik beste baliokide batetara joaten gara eta beraz berdintza zuzen batetik zenbaki berdinez osaturik dagoen eta zuzena den beste batetara.

Propietate honi BATUGAIAREN propietatea deituko diogu:

Adibidez:

$(3 \,.\, 2) - 4=2$	$(2 \,.\, 5)+4=14$	$(3 \,.\, 4)-(2 \,.\, 3)=5+1$
$3 \,.\, 2=2+4$	$4=14-(2 \,.\, 5)$	$3 \,.\, 4=(5+1)+(2 \,.\, 3)$

Har dezagun orain T (3, 5, 15, ., :, ,1) multzoa eta saia gaitezen berdintza zuzenak sortuz, lehengoko baldintza berdinak errespetatzen.

$3 \,.\, 5=15$	$(5 \,.\, 3) : 15=1$
$5=15 : 3$	$(3 \,.\, 5) : 15=1$
$5 \,.\, 3=15$	$1=(15 : 3) : 5$
$3=15 : 5$	$1=(15 : 5) : 3$

Goiko berdintza hauetan lege berdina azaltzen da: "berdintzaren alde batean biderkatzen ari dena (biderkagaia) beste aldera pasatzerakoan zatitzaile bihurtzen dela; eta alderantziz ere: hau da, alde batetan zatitzailea dena beste aldera pasatzerakoan biderkagai bihurtzen dela" legea, hain zuzen.

Lehen esandakoa berresanez, propietate hau erabiliz berdintza batetik beste baliokide batetara joango garela azpimarkatu nahi genuke; propietate honi BIDERGAIAREN propietatea deitzen diogu.

Adibidez:

$(4+2) \,.\, 4=24$	$(3-2) \,.\, 4=5-1$	$(8-5) \,.\, (4+2)=13+5$
$4+2=24 : 4$	$1=(5-1) : 4$	$8-5=(13+5) : (4+2)$

Berdintzaren "berdin" ikurra mugarri bat da eta alde batetik bestera pasatzeko aipaturiko legeak errespetatzea eskatzen du. Izan ere kontutan zera hartu behar dugu, gaiak bakarrik pasa ditugula, inolaz ez ordea gai ez den zenbakirik.

$$(3 . 2)+4=10$$
$$2+4=10:3$$

Bi lege hauk konbinatu egin ditzakegu; hots, BATUGAIAREN eta Biderkagaiaren propietateak elkartuz: 1 2

$$\begin{array}{lcl} (3 . 2)+4=10 & \quad & (4+2) . 3=18 \\ \Updownarrow 1 & & \Updownarrow 2 \\ 3 . 2=10-4 & & 4+2=18:3 \\ \Updownarrow 2 & & \Updownarrow 1 \\ 2=(10-4):3 & & 4=(18:3)-2 \end{array}$$

Egin dugun lan hau oso beharrezkoa zen, ekuazioak ondo aztertzeko berdintzak oso ondo begiratzea derrigorezkoa bait da; pentsa dezagun azterketa hori bukatu dugula eta sar gaitezen orain ekuazioaen munduan.

Oharra: Lan honetan ezezagun bakarreko ekuazioez hitz egingo dugu soil-soilik.

- Ekuazioa proposizio bat da.

Ekuazioa, berdintza bat denez gero, proposizio bat da; proposizioa osatzen duten elementuen arteko bat ezezaguna delarik, ekuazio bat dugu.

Ekuazioak:

Errenteria ....dago"
"Odolaren kolorea..........da"
"4+ ....= 6"
"4+..........>6"

Proposizio guztietan zuzenak edo okerrak aurki daitezke dudarik gabe. Baina ez da gauza bera gertatzen ekuazio batekin, ezin bait dugu esan zuzena ala okerra den.

Har dezagun M (Gipuzkoan, Nafarroan, Bizkaian) multzoa eta ordezka ditzagun multzo honetako elementuak ekuazioan.

"Errenteria Gipuzkoan dago"	ZUZENA
"Errenteria Nafarroan dago"	OKERRA
"Errenteria Bizkaian dago"	OKERRA

Ekuazioa hartuz eta M multzoko elementuak ordezkatuz, hiru proposizio sortu ditugu; hiru hauetan bat ZUZENA da eta beste biak OKERRAK.

Ekuazioa proposizio zuzen bihurtzen duen M multzoko elementuari ekuazioaren erroa deitzen da eta erroak biltzen dituen multzoa, ERRO multzoa. ERRO multzo honen izena E izaten da; gura kaso honetan: E =(Gipuzkoa).

Ekuazioaren erro multzoa bilatzeko egiten den lanan, "ekuazioaren askaketa" deitzen da; askaketa honen pausoak ondorengo hauk dira:

1.- M multzoko elementuak ekuazioan ordezkatzea.

2.- Osatzen diren proposizioetan, zuzenak bereiztea.

3.- Ekuazioa proposizio zuzen bihurtzen duen M multzoko elementuak bilduz, ERRO multzoa osatzea.

Egin ditzagun ondorengo ariketa hauk:

a) Bila ezazu: "odolaren kolorea..........da" ekuazioaren ERRO multzoa M (urdina, zuria, gorria, berdea) multzoan.

Ekuazioa	M multzoa	Proposizioa	Zuzena.	Okerra.	ERRO multzoa
"Odolaren kolorea...da"	urdina	"Odolaren kolorea urdina da"		X	
"Odolaren kolorea...da"	zuria	"Odolaren kolorea zuria da"		X	
"Odolaren kolorea...da"	gorria	"Odolaren kolorea gorria da"	X		gorria
"Odolaren kolorea...da"	berdea	"Odolaren kolorea berdea da"		X	

Ekuazio honen ERRO multzoa, E =(gorria) da
ERRO multzoak elementu bakarra du

b) Bila ezazu "4 + ... = 6" Ekuazioaren erro multzoa M_1 = (3,4,5) multzoan eta gero M_2 = (0,1,2) multzoan.

Ekuazioa	M_1 multzoa	Proposizioa	Zuzena	Okerra	ERRO m.
4+..=6	3	4+3=6		X	
4+..=6	4	4+4=6		X	
4+..=6	5	4+5=6		X	

$E_1 = \emptyset$

Ekuazioa	M_2 multzoa	Proposizioa	Zuzena	Okerra	ERRO m
4+..=6	0	4+0=6		X	
4+..=6	1	4+1=6		X	
4+..=6	2	4+2=6	X		2

$E_2 = (2)$

Ezin esan dezakegu zein den ekujazio baten ERRO multzoa, ez bait digute esaten zein multzotan bilatu behar ditugun erroak; adibide honetan argi ikusten da hori, ekuazio berdinerako bi ERRO multzo desberdin lortu bait ditugu.

$E_1 = 0$
$E_2 = 2$

c) Bila ezazu "4+...> 6" ekuazioaren ERRO multzoa M = (0,2,4,6,7) multzoan.

Ekuazioa	Multzoa	Proposizioa	Zuzena	Okerra	ERRO multzoa
4+..>6	0	4+0>6		X	
4+..>6	2	4+2>6		X	
4+..>6	4	4+4>6	X		4
4+..>6	6	4+6>6	X		6
4+..>6	7	4+7>6	X		7

$E = \{4, 6, 7,\}$

Hona hemen ezezagun bakarreko ekuazio bat hiru errorekin. Egia esan "4+ ..> 6" ez da berdintza, desberdintza bat baizik, hala ere, adibide gisan aipatu nahi izan dugu, eta ikuspegi honek garbi erakus dezake gaiaren zabaltasuna.

d) Bila ezazu "4+2 .. 6" ekuazioaren erro multzoa $M = \{=, >, <, \geqslant, \leqslant\}$ multzoan.

Ekuazioa	Multzoa	Proposizioa	Zuzena	Okerra	ERRO multzoa
4+2 ..6	=	4+2=6	X		=
4+2 ..6	>	4+2>6		X	
4+2 ..6	<	4+2<6		X	
4+2 ..6	⩾	4+2⩾6	X		⩾
4+2 ..6	⩽	4+2⩽6	X		⩽

$E = \{=, \geqslant, \leqslant\}$

Hona hemen adibide harrigarri, bat ekuazio honen erroak ikurrak bait dira:

$$E = \{=, \geqslant, \leqslant\}$$

Utz ditzagun oraingoz adibide hauk eta saia gaitezen beste problema batekin.

- Bila ezazu "......= $\overline{3}$ " ekuazioaren ERRO multzoa M = Z multzoan.

Kaso honetan ezin dezakegu taularen sistema erabil, M multzoa bukaezina bait da eta elementu guztiak ordezkatzea guztiz ezinezkoa. Baina ekuazioa oso erraza da eta, berdintasun erlazioaren definizio axiomatikoa erabiliz, ekuazio honen erro bakarra $\overline{3}$ dela baiezta dezakegu.

$$\left.\begin{array}{ll} a = a & \text{zuzena} \\ a = b & \text{okerra} \end{array}\right\} \quad \text{izan bait zen ohnartu genuen definizioa.}$$

Nahiz eta M bukaezina izan, E= ($\overline{3}$) esan dezakegu.

- Bila ezazu "4+ ...= 6" ekuazioaren erro multzoa E=N multzoan.

Ekuazio honen askaketa erruz konplikatu da, taularen bidea ez bait dugu jarraitu eta berdintasun erlazioaren definizioak ez digu asko lagunduko. Baina beti dago aterabideren bat; hona hemen

$$a)\ \text{“}4+\ldots=6\text{” eta}$$
$$\Updownarrow \text{①}$$
$$b)\ \text{“}\ldots=6-4\text{”}$$

berdintzak baliokideak dira, BATUGAIAREN propietatea erabiliz sortu bait dugu bigarrena; baina baliokideak izateak ZENBAKI BERDINEZ osaturik egotea eta ZUZENAK izatea esan nahi du.

Ekuazioaen munduan sarturik, zer esan dezakegu: ekuazio baliokideek ERRO multzo berdina izango dutela, ZENBAKI BERDINAK izango bait dira bi ekuaziook ZUZENAK bihurtuko dituztenak.

a) -ren ERRO MULTZOA E_1

$\Longrightarrow E_1 = E_2$

b) -ren ERRO MULTZOA E_2

Har dezagun orain b ekuazioa:

$$b)\ \text{“}\ldots\ldots\ldots=6-4\text{”}$$
$$\Updownarrow$$
$$c)\ \text{“}\ldots\ldots\ldots=2\text{”}$$

Pauso hau ez da berez hain berria, 6 – 4 edo 2, baliokideak bait dira

a) $4+\ldots\ldots=6$ E_1
①$\Updownarrow$ $\Longrightarrow E_1 = E_2$
b) $\ldots\ldots=6-4$ E_2 $\Longrightarrow E_1 = E_3$
$\Updownarrow$ $\Longrightarrow E_2 = E_3$
c) $\ldots\ldots=2$ E_3

Baina E_3 $\{2\}$ multzoa da, lehengo ariketan ikusi genuen bezala; beraz E_1 $\{2\}$ multzoa zera izango da:
$4+\ldots\ldots=6$ Ekuazioaren erro multzoa.

Era honetan, ekuazioak askatzeko bide tradizionaletan sartzen gara eta hemendik aurrera esan dezakeguna oso ezaguna da. Hala ere ekuazioen askaketak graduazio bat eskatzen du, eta graduazio horren projektu bat azaldu nahi dut ondoren:

1.- Propietate bakar bat erabiliz aska daitezkeen ekuazioak.

1 – a : “$4+\ldots=7$” $E=N$
①$\Updownarrow$
“$\ldots=7-4$”
$\Updownarrow$
“$\ldots=3$”
$E=(3)$

1 – b : “$3\ldots=\bar{9}$” $E=N$
②$\Updownarrow$
$\ldots=\bar{9}:3$
$\Updownarrow$
$\ldots=\bar{3}$
baina $\bar{3}\notin N$, beraz $E=\emptyset$

2.- Bi propietateak erabiltzeak esakatzen dituen ekuazioak.

2 – a $\quad (3\ ......) + 2 = 8 \qquad E = N$

$3\ ...... = 8 - 2$

$...... = (8 - 2) : 3$

$...... = 2$

$E = \{2\}$

2 – b $\quad (4 + ...) \cdot 2 = 12 \qquad E = Z$

$4 + ... = 12 : 2$

$.... = (12 : 2) - 4$

$.... = 2$

$E = \{2\}$

3 – b $\quad (.... : 2) - 1 = 4 \qquad E = N$

$.... : 2 = 4 + 1$

$.... = (4 + 1) \cdot 2$

$.... = 10$

$E = \{10\}$

3.- Ondoren, ezezaguna bi lekutan azaltzen denekoa etorriko litzateke. Baina ekuazio hauek banatze propietatea erabiltzea eskatzen dute eta hori beste hurrengo baterako utzi nahi genuke, eragiketen propietateak beste gai bat bait dira, kapitulu berezi bat eskatzen dutenak.

☆ ☆ ☆