EKUAZIOAK

J. M. GOÑI

1.- Ezezagun bakarreko lehenengo mailako ekuazioak.

Ekuazioak, beren terminoen artean ezezagunak dituzten berdintzak dira.
Berdintzak direnez gero, berdintza deritzagu abiabururik aproposena ekuazioen azterketa sakon bat hasteko.

Berdintza, berdintasun erlazioa adierazteko erabiltzen dugun espresio matematikoa da:

$$3 + 4 = 9 - 2$$

Esan dugun bezala berdintza erlazio baten adierazpena da eta erlazio izate honek garrantzia handia du egiten ari garen lantxo hauetan.
Izan ere, ez dago erlazioa definitzerik, zein multzoren artean definitzen den aipatu gabe; lan honetan Q multzoa hartuko dugu bi arrazoigaitik: lehenengoa, multzo hau delako E.G.B.-en erabiltzen den multzorik zabalena; eta bigarrena, lehenengo mailako ekuazioei erantzuteko nahikoa delako.

1) BERDINTASUN ERLAZIOA Q MULTZOAN

Erlazioa definitzeko honako era hau erabiliko dugu:

"Q"-tik "Q"-rako "S" erlazioa.
"S" erlazioa:.....eta.....berdinak dira.

erlazioa definitzeko era honek abantail bat dauka dudarik gabe, erlazioa proposizio moduan uler eta erabil daitekeela alegia.

Har ditzagun "Q" multzoko elementu bi, $\frac{a}{b}$ eta $\frac{c}{d}$ zenbaki arrazionalak alegia;

"$\frac{a}{b}$ eta $\frac{c}{d}$ berdinak dira" proposizioa zuzena da,
"a.d eta b.c berdinak dira" proposizioa zuzena denean; eta okerra, ordea, "a.d eta b.c berdinak dira" proposizioa okerra denean.

Adibidez:

"$\frac{3}{2}$ eta $\frac{6}{4}$ berdinak dira" proposizioa zuzena da, "3.4 eta 6x2 berdinak dira" proposizioa zuzena delako.

" $\frac{3}{2}$ eta $\frac{\bar{3}}{4}$ berdinak dira" proposizioa okerra da, "3.4 eta 2.$\bar{3}$ berdinak dira" proposizioa okerra delako.

Argi azaldu da hemen Q barruko berdintasun erlazioak eta Z barrukoak elkar duten lotura hertsia, bat definitzeko bestean oinharritu behar bait gara.

Eta zergatik esaten dugu "3x4 eta 6x2 berdinak dira" proposizioa zuzena dela?

Galdera honi erantzuteko, "Z" barruan berdintza nola definitzen den ikusi beharko dugu.

1-1 BERDINTASUN ERLAZIOA "Z" MULTZOAN

"Q" multzoan egin genuen bezala, lehen- lehenik erlazioa adierazteko era aipatuko dugu:

"Z-tik Z-rako N erlazioa"
"N.....eta..... berdinak dira"

Har ditzagun "Z" multzoko elementu bi, "a" eta "b" elementuak alegia, eta definizioz bi lege hauk onhartuko ditugu:

"a eta a berdinak dira" proposizioa, zuzena da.
"a eta b berdinak dira" proposizioa, okerra da.

Adibidez:

"$\bar{3}$ eta $\bar{3}$ berdinak dira" proposizioa, zuzena da.
"$\bar{3}$ eta 5 berdinak dira" proposizioa, okerra da.

Itzul gaitezen gure lehenagoko arazora: zergatik den zuzena "3x4 eta 6x2 berdinak dira" proposizioa, alegia.

3x4 eta 12, zenbaki berdinaren adierazpen desberdinak dira.
6x2 eta 12, zenbaki berdinaren adierazpen desberdinak dira.

Beraz "3x4 eta 6x2 berdinak dira" proposizioa

eta "12 eta 12 berdinak dira"proposizioak baliokideak dira

Bigarrena zuzena da definioz eta, ondorioz, lehenengoa ere hala dela esan dezakegu.

Berdintasun erlazioaren ikur berezia "berdin" (=) da eta erlazionatu nahi ditugun zenbakien artean idazten da.

3=3 "3 eta 3 berdinak dira" proposizioaren adierazpena da

3=5 "3 eta 5 berdinak dira" proposizioaren adierazpena da.

Adierazpen hau erabiliaz lana erruz errazten da; lehenago aipaturiko kasua ondorengo era honetan adieraz dezakegu:

$\Uparrow$ geziak, beheko eta goiko erlazioak kategoria berdinekoak direla esan nahi du, dudarik gabe behekoa zuzena da (definizioz) eta ondorioz goikoa ere bai

Beheko proposizioa okerra (definizioz) eta geziak goikoa ere halakoa dela esaten digu.

Ariketa:

nolakoa da $\frac{3}{4}:\left[\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\right]=\left(\frac{3}{4}:\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)$ berdintza? zuzena ala okerra?

$$
\begin{array}{ccc}
 & \Uparrow & \\
\frac{3}{4}:\left[\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\right] & = & \left(\frac{3}{4}:\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right) \\
\downarrow\downarrow \quad \downarrow & \Uparrow & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
\frac{3}{4}:\ \frac{11}{14} & = & \frac{6}{28} + \frac{3}{8} \\
\downarrow & \Uparrow & \downarrow \\
\frac{33}{56} & = & \frac{33}{56} \\
 & \Uparrow & \\
33 . 56 & = & 56 . 33 \\
 & \Uparrow & \\
1.848 & = & 1.848
\end{array}
$$

Goiko berdintza zuzena da, behekoa hala delako.

Beheko proposizioaren zuzentasunak tarteko edozein batena zihurtatzen du, eta lehenengoarena ere bai, noski; izan ere, berdintza honen zuzentazuna axiomaz onhartu dugu eta honek argi erakusten du egia matematikoaren era berezia.

2) BERDINTZAK OSATZEKO ERABILTZEN DIREN ELEMENTUEN EGINKIZUN MATEMATIKOAK

Ekuazioak aztertzeko eta batez ere ekuazioen askaketan sartzen garenean, berdintzan erabiltzen diren elementuen eginkizun matematikoak ezagutu beharra dago; zer ulertzen dugu "eginkizun matematiko" expresioa aipatzen dugunean?; elementu hauk eragiketa bati loturik egoten dira eta lotura horrek eginkizun berezi bat ematen die, hala nola:

$(3, 4) \xrightarrow{+} 7$; $(3, 4)$ bikoteari batuketa dela medio
7 – a, dagokiola adierazten du expresio honek;
3 – a eta 4 – a batugaiak direlarik

berdintza moduan idatzita

$$3+4=7$$

Hala ere goiko eta beheko espresioak ez dira berdinak; behekoak 3+4 baturaren emaitza eta 7 – a berdinak direla esaten bait du, eta ez zein den 3+4 baturari dagokion emaitza; beheko expresio hau beste era honetan hobe uler daiteke:

$$\begin{array}{ccc} 3+4 & = & 7 \\ \downarrow & \Uparrow & \downarrow \\ 7 & = & 7 \end{array}$$

nahiz eta bereizketa hau oso garrantzitsua izan berdintzaren esannahi osoa ulertzeko, lanaren sailtxo honetan elementuak zein egunkizun batetzen dutenari jaramon gehiago egingo diogu eta **3+4=7 berdintzaren aurrean 3 – a eta 4 – a batugaiak direla esango dugu**

3-aren eginkizun matematikoa batugai izatea da
4-aren eginkizun matematikoa batugai izatea da

Adibidez:

har dezagun 3+5=4 . 2 **berdintza, eta bete dezagun beheko taula** hau:

Elementuak	Eginkizun matematikoak
3 – a	**batugaia**
5 – a	batugaia
4 – a	bidergaia
2 – a	bidergaia

Har dezagun 8 : 2 = 5 – 1 berdintza, eta bete dezagun beheko taula hau:

Elementuak	Eginkizun matematikoak
8 – a	Zatikizuna
2 – a	Zatitzailea
5 – a	Kenkizuna
1 – a	Kentzailea

Aurreneko kasu hauetan, eragiketak xinpleak ziren; hots, erabiltzen zituzten gaiak zenbakiak ziren eta ez beste eragiketa baten emaitzak; adibidez 3 . (4+2)=7 – 1 berdintzan eta ezkerreko aldean eragiketa konposatu bat dugu, bigarren bidergaia batura bat delako; gauza bera esan dezakegu 3+1=(8 . 2)+4 berdintzaren eskuineko aldean, lehenengo batugaia biderdura bat delako.

Kasu hauetan, lehen eginiko bereizketa garrantziatsuagoa bihurtzen da, eragiketa konposatuak agertzen direnean, parentesi osoak gaiaren eginkizuna betetzen bait du eta parentesi barruko zenbakiak ezin bait dira separatu.

Adibidez:

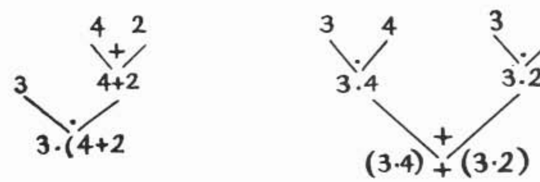
3 . (4+2) =3 . 4+3 . 2 berdintzaren azterketa.

Ezker aldea:

$$3\,.\,(4+2)\ \text{biderdura bat da} \begin{cases} 3 - \text{a bidergaia} \\ (4+2)\text{-a bidergaia} \begin{cases} 4 - \text{a batugaia} \\ 2 - \text{a bidergaia} \end{cases} \end{cases}$$

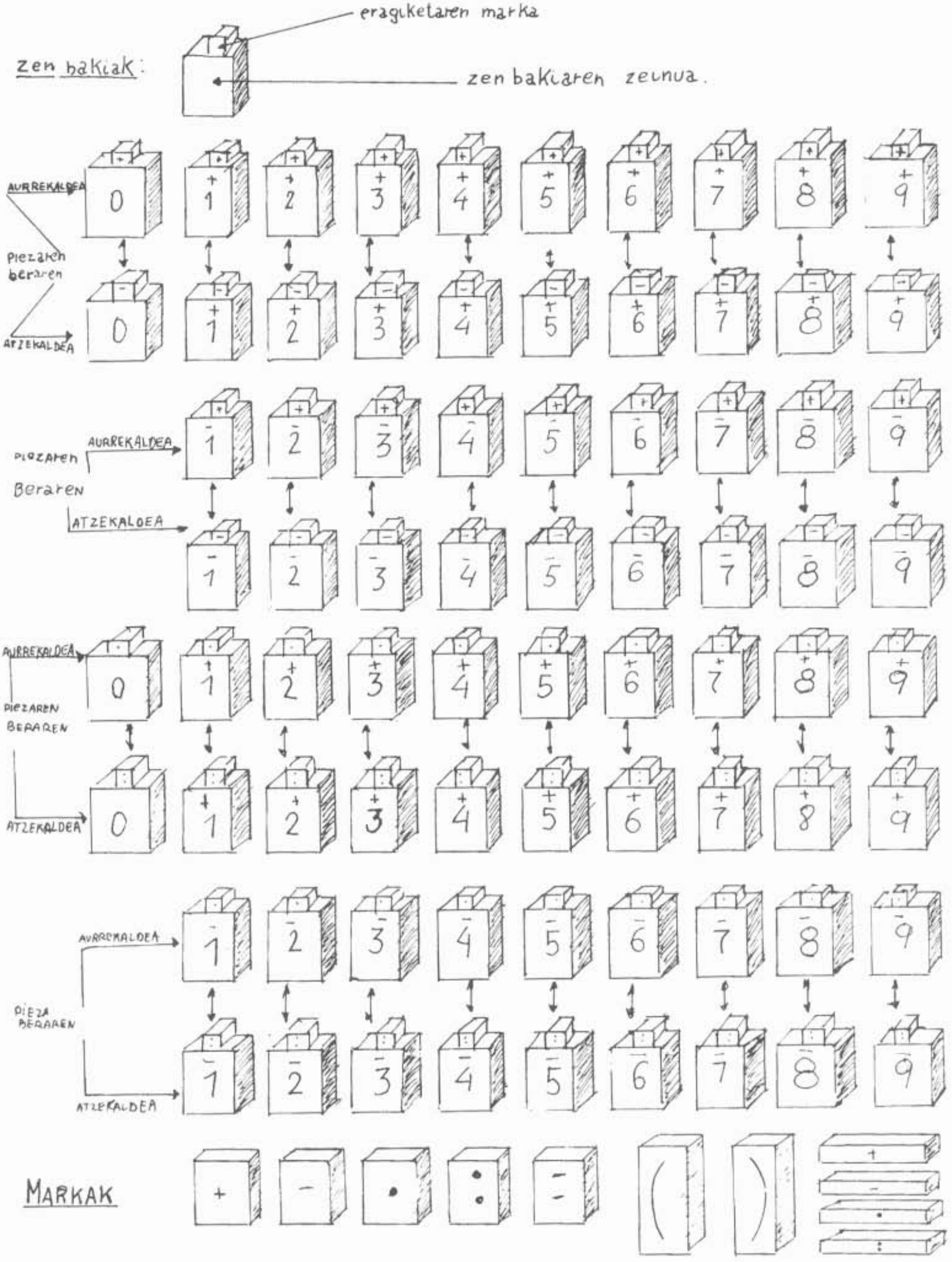
Eskuin aldea:

$$(3\,.\,4)+(3+2)\ \text{batura bat da} \begin{cases} (3\,.\,4)\text{-a batugaia} \begin{cases} 3 - \text{a bidergaia} \\ 4 - \text{a bidergaia} \end{cases} \\ (3\,.\,2)\text{-a batugaia} \begin{cases} 3 - \text{a bidergaia} \\ 2 - \text{a bidergaia} \end{cases} \end{cases}$$

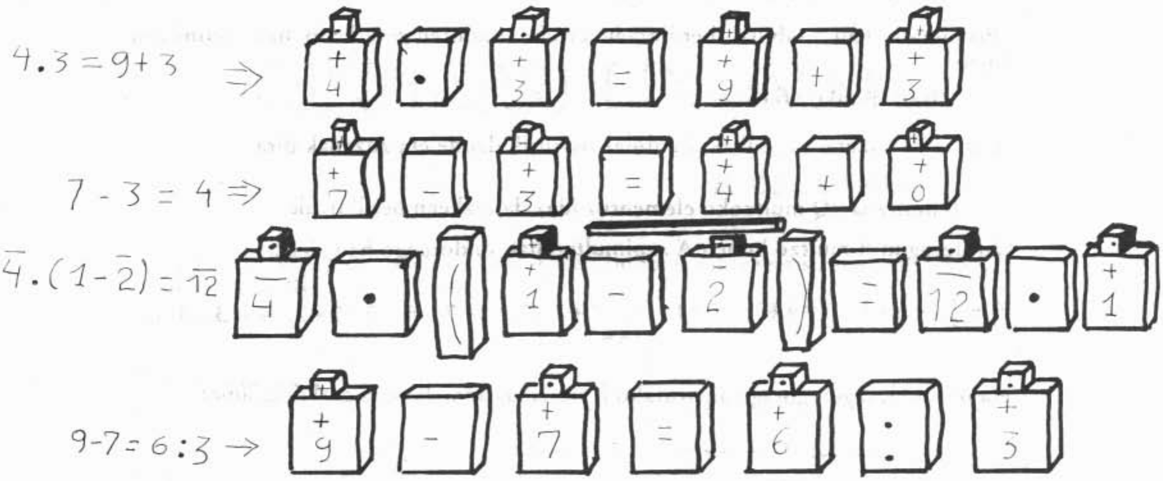


Matematikaren arlo hau aztertzeko eta berdintzak osatzerakoan erabiltzen ditugun elementuak ondo ezagutzeko eta eskuko materialea komenigarri izango delakoan edo, ondorengo material hau prestatu dugu eta dagoenekoz era esperimental batetan erabiltzen du 7. Basikako kurtsoan.

Kartulinazko piezek osatzen dute materiale hau; materiale honetan bai zenbakiak bai markak erabiltzen dira.



Ondoren pieza hauk erabiliz zenbait berdintza, osa dezakegu, hala nola.



Kasu egin, kenkizuna batugai bat bezala kontsideratu dugula eta zatikizuna bidergai bezala; ez dugu hau nahi gabe egin, zeren eta horik bait dira gai hauek betetzen dituzten eginkizun matematikoak.

3) BERDINTZA BALIOKIDEAK

Har dezagun L={3,4,7,+, –,=,0} multzo honetako elementuak erabiliz, osa ditzagun ondorengo baldintza hauk errespetatu posible diren berdintza guztiak.

- zeroa, bakar-bakarrik emaitza bezala erabil daiteke.
- beste zenbaki guztiak behin bakarrik erabil daitezke.
- zuzenak izan behar dute.

3+4=7	4=7 – 3	(3+4) – 7=0	7 – (3+4)=0
4+3=7	7 – 3=4	(4+3) – 7=0	7 – (4+3)=0
7+4=3	3=7 – 4	0=(3+4) – 7	0=7 – (3+4)
7+3=4	7 – 4=3	0=(4+3) – 7	0=7 – (4+3)

Nahiz eta goiko hauk ahal diren guztiak izan, askok ez dute deus berririk ekartzen, eta ondorengo hauekin gelditukogara:

3+4=7	3+4 – 7=0
4=7 – 3	0=7 – 4 – 3
3=7 – 4	

Aipaturiko goiko berdintza hauk, ondorengo propietate honen jabe dira:

"zenbaki berdinez osaturik daude eta zuzenak dira"

Propietate hau erabiliz, berdintzen arteko ondorengo erlazio hau definitzen dugu:

B-tik B-rako erlazioa.

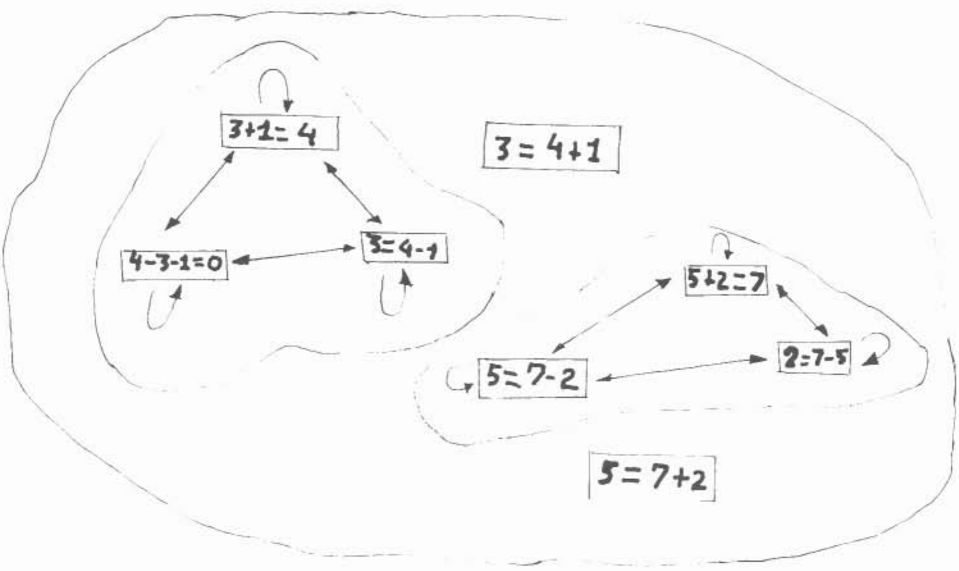
b erlazioa:.....eta..... zenbaki berdinez osaturik daude eta zuzenak dira

B multzoa Q multzoko elementuz idaz daitezkeen berdintzak

Har dezagun B multzo honen A azpimultzo bat, ondorengo hau alegia:

$$A = \{3+1=4,\ \ 3=4+1,\ \ 3=4-1,\ \ 5+2=7,\ \ 2=7-5,\ \ 5=7+2,\ \ 4-3-1\ \ 0;\ \ 5=7-2$$

eta defini dezagun gorago aipatutako b erlazioa, hona hemen gezi diagrama:



A

Klase bakoitzaren barruan ematen diren pausoak onak bezala kontsideratuko ditugu, baina klasetik ateratzean txarrak
Adibidez:

$$3+1=4 \Leftrightarrow 1=4-3 \quad \text{pauso ona} \qquad\qquad 3+1=4 \not\Leftrightarrow 3=4+1 \quad \text{pauso txarra}$$

(jarraitzeko)