KATEGORIEN TEORIARI HITZAURRE BAT

Ohar labur batzuk besterik ez dituzu honako hauk. Teoria matematiko berri bezain zabal honen sorreraz eginak eta lau puntuotan emanak: erreferentzia filosofikoak, genesis matematikoa, motibazio matematikoak, teoria biltzaileena egun.

1.- ERREFERENTZIA FILOSOFIKOAK

Ez dut honekin aditzera eman nahi zera, filosofiazko interbentzio zuzen batek teoria matematiko honen debelopamenduan aurkituko lituzkeen posizio epistemologikoak.

Bakarrik, hauxe aipatu nahi dut, halegia teoriaren oinarrizko kontzeptuak izenez (hainbatetan izanez ere bai, baina hau beste kontu bat da, analisis epistemologiko baten ondoren baiezteko ala ezeztekoa) zein kategoria filosofikori atxikiak dauden.

Saunders Mac Lane irakasleak (teoriaren sortzaileetako bat duzu berau) dioskunaren arauera, hiru filosofo (aldi berean, logikalari) aipatu behar dira bereziki: Aristoteles, Kant eta Carnap. Jakina, ez bakarrik Aristotelek eta Kantek erabili dituzte "kategoriak". Eilenberg eta Mac Lane, ordea, batez ere bi horiengan inspiratu omen zirenez gero, horietxen erreferentzia ematera obligaturik gaude.

— Aristoteles: Organon tratatuaren lehen liburua: "KATEGORIAK", non autoreak kontzeptuaren istudioa egiten baitu, esan nahi baita atributu bat subjektu bati predikatzeko hamar modu ezberdinen analisisa. Substantzia, kantitatea, kalitatea, erlazioa, lekua, denbora, posizioa, jabegoa, ekintza, grina: hauetxek dira Aristoteleren kategoriak. Alde batetik, substantzia; bestetik, akzidenteak.

— Kant: "ARRAZOIN SOILAREN KRITIKA" (Kontzeptuen Analitika, Lehen Kapitulua, 3. atala). Kantek nahi duenez, bi ezaguntza modu daudelarik (intuizioarena eta kontzeptuarena) intuizioa sentsibilitateari dagokio eta kontzeptua endelegamenduari. Sentsibilitateak objektuak "ematen" baldin badizkigu, pentsatu, intuiziozko objektu hauen "pentsatzea" endelegamenduaren egitekoa da. Eta horretarako azken honek a priori gordeak dituen kontzeptu soil edo kategoria hauetaz baliatzen da:

- Kantitatearenak: Batasuna, Aniztasuna*, Osotasuna.*
- Kalitatearenak: Errealitatea, Ukazioa, Mugatasuna.
- Erlazioarenak: Inherentzia eta Subsistentzia, Kausalitatea eta Dependentzia, Komunitatea.
- Modalitatearenak: Ahaltasuna-Ezintasuna, Esistentzia-Ezesistentzia, Beharra-Kontingentzia.

(Beraz, hamabi kategoria guztitara).

— Carnap: "LENGOAIAREN SINTAKSIS LOGIKOA" (Lehen Partea, hirugarren paragrafoa: Predikatuak eta Funktoreak).

Obra honetatik hartua da funktore hitza. Carnapek predikatu kontzeptua zera honetarako erabiltzen du, objektu nahiz posizio baten propietatea edo zenbait objekturen nahiz posizioen arteko erlazioa adierazteko.

Predikatuak horretarakoxe balio duten izenak ditugu. Funktoreek, berriz, hauxe adierazten digute: posizioen propietate edo erlazioak zenbakien bidez.

Kategorien teoriaren beste oinarrizko kontzeptuak eguneroko mintzairatik (esate baterako –e.b.–, "aldaketa naturala") edo Matematika beratik (e.b., "parekotasuna") helduak dira. Filosofiak ere besterik eskaini dio (e.b., "problema unibertsala").

Bistan denez, hitz guztiok teoriaren barnean kontzeptu bihurtzerakoan, beste esannahi zorrotz eta mugatu bat hartzen dute.

2.- GENESIS MATEMATIKOA

Kategoristak (teoriaren sortzaileak bederen) konstatazio batetik abiatzen dira: sistima matematikoen anitz propietate bateratua eta sinpletua izan daitekeela gezien bidez egin diagramak erabiliz.

Edozein funkzio gezi batez errepresenta daitekeelaren ideia 1940 ingurukoa dugu. Garai hartan topologian egiten diren lanetan azaltzen da modu sistimatiko batez; esaterako, W. Hurewicz-en talde homotopikoen istudioetan (ordukoak ditugu ere diagrama truka-korrak). Laster hedatzen da prozedura sinple hau: Fox, Steenrod eta abar. Hauen paperetan agerian daude geziak, eta ezkutuan –baina, nolanahi ere erabiliak–funktoreak. Horrela, f: X Y markatzen da. Eta ez gehiago f (X) C Y, ohitura zaharrek ziotenaren arauera. Modu honetan gezi notazio (marka) hutsetik kategoria kontzepturako bidea irekitzeko lehen urratsak ematen dira.

Kategoriak, Funktoreak eta Aldaketa Naturalak (beraz, Kategorien teoriaren oinarriak) S. Eilenberg-ek eta S. Mac Lane-k topologia algebrikoan egin ikerketen frutu dira; hauen homologiazko paperetan lehen aldiz erabiliak, hain zuzen Cech-en kohomologiaren istudioan, 1942an.

Hiru bat urte berantago (1945ean) Kategorien teoria, teoria autonomo bezala debelopatzen hasten dira Eilenberg eta Mac Lane: "General theory of natural equivalences". Hauen ondotik teoria beraren lanketa dator: Yoneda, Kan, Lawvere, Freyd, Steenrod, Grothendieck, Linton, Dubuc... Ehresmann, Bénabou...

Teoria honen emaitzen aplikazioak berehala datoz: topologia algebrikoan, batez ere algebra homologikoan, geometria algebrikoan, algebra orokorrean eta abar.

3.- MOTIBAZIO MATEMATIKOAK

Terminuak zorrotz definitzen eta inferentziak formaltzen biziki entseiatu zen matematikagintzan ere, ba zen haatik (eta ba da oraino... eta izanen da segurik, intuizioak oro ez baitaude betirako baztertzerik) intuizioz –intuizio hutsez– josi ideia franko.

Halakoak ditugu, esaterako, "natural" eta "kanoniko" ideiak. Sekula ez zen definitzen (eta, beraz, mugatzen) zer zen "natural" eta zer "kanoniko". Dena den, behaztopa eta kezka teoriko larregirik gabe esaten zen halako eredu bat teorema jakin baten interpretazio "naturala" zela, holako oinarria bektor espazio eman baten oinarri "naturala" zela, halako teoria sistima formal jakin baten eredu "naturala" zela, holako ordenua, berriz, multzo ordenatu eman baten ordenu "naturala". Halaber, oztopo handirik gabe esaten zen biderdura eman batez biderdura "kanoniko" zela, edo injekzio jakin batez injekzio "kanoniko" zela, isomorfismu eman batez isomorfismu "kanoniko", aplikazio eman baten deskonposamendu jakin batez bidergaiketazko deskonposamendu "kanoniko", edo makur baten errepresentazio jakin batez, berriz, errepresentazio "kanoniko".

Kanoniko eta natural deituak formarik performanteenak omen. Gisa honetan kalifikatu eraikidura matematikoak zentzubakarreko omen. Esan nahi baita, nahi bezalako hauturik gabekoak. Bistan da, hau guztia zenbateraino den ilun eta laino.

Antzeko fenomenoak ditugu "aldaketa" ideiarekin, "parekotasun" ideiarekin, "adjunktu" ideiarekin. E.b., azken hitz hau, zahazpen handirik gabe, operatore diferentzial linearrak deskribatzeko erabilia izan zen. Geroztik, 1930 inguruan, Hilbert-en espazioen istudioan. 1958an lehen aldiz Daniel Kan-ek mugatuko du zorrozki funktore adjunktuen kontzeptua.

Intuizio hutsari (eta arauerako pragmatismu matematikoari) dei eginez, konsensus orokorraz jabeturik zeuden ideiok eta beste hainbat, kontzeptu zorrotz bihurtuko ditu Kategorien teoriak, kontzeptu berrien konsensusak ideia zaharren deskonsensusa Kategorien teoriak, kontzeptu berrien konsensusak ideia zaharren deskonsensusa ezinbestez sorteraziz.

4.- TEORIA BILTZAILEENA, EGUN

Kategorien teoriak matematikagintzan ezartzen duen zorroztasunaz eta prezisioaz zertxobait esana dudanez, aipatzea merezi duen beste alderdi bat hauxe da: teoria honek agertzen duen orokortasuna* .

Esan dezakegu egun Matematikan ezagutzen den Matematikaren teoriarik biltzaileena dugula. Multzoen teoria bera bildua kausitzen da Kategorien teorian. Matematikan produkzituak teoriaz teoria orokortasunez ordenatu estratoen bidez piramide bat osatuko balu, gaur piramidearen puntan Kategorien teoria genuke.

Ezaguna da, betidanik "zientzia matematikoen" sintesisaren zale izan den matematikagintza nola urratsez urrats pasa zen pitagoristen aritmetismutik ("dena zenbaki da"), Grezia klasikoaren geometrismura eta hemendik Descartes-en algebrismura. Hemeretzigarren mendeko azken 25 urte ingurutan Cantor-en Multzoen Teoriak ikuspegi sintetista hau biziki baztertzen du, urte batzuk lehenxeago Zenbakien Teorian lanean zihardutenek markatu bideari jarraikiz. Ez zen areago zuzen delako "sintesisaren" alde lehiatzea. Jadanik, egiturak, morfismuak eta ereduak lantzen ziren. Eta hauen bidez ahalezko zen modu zorrotz batez teoria matematikoak Multzoen teoriara biltzea, lehenxeago zenbaki arruntetara* behaztopaz bildu nahi izan zena, oraingoan molde zuzen batez multzoetara biltzea lortuz. Biltzaile eta ez "sintesitzaile" izate hau zen (eta da) garrantzizko.

"Dena multzo da" izan da hogeigarren mendearen hasieratik ia egundainoko aipu sonatua matematikalarien artean. Gaur Kategorien teoria orokorrago eta biltzaileago dela eta, hasi da hedatzen beste hau: "Dena kategoria da".

Orokortasun honetaz honako puntu hau garbi ukan behar da, halegia Kategorien teoria, bere orokortasunean, ez dela matematikagintzarako egoki litzatekeen (eta den) hizkuntza-molde huts bat. Matematikalari frankoren artean, egun oraino hizkuntza-molde huts honetara mugatua badago ere, gauzak aldatzen doazela esan behar. Pixka bat, Multzoen teoriari gertatu zitzaiona gertatzen ari zaio oraingo teoria honi. Zera, Multzoen teoriaren bidez aurkikunde* berriak erdiesten ari ziren garaian, nahiz algebran nahiz analisisean, ba zen hala ere matematikalari analista ez gutxi Multzoen teoria mintzamolde soilaren mailara zokoraturik zedukatenak, gainontzekoan, tradizioari fidelki jarraikiz, premultzo produkzio tresnak erabiliz.

Egia, kuestio honetan gauzak kanbiatzen doaz. Hain zuzen, Kategorien teoriaren orokortasun horixe aurkikunde bide gertatu eta gertatzen ari delako.

Orokortasun honek Matematikan dakarren barne berorganizaketa logikalariari askori balio handikoa iduritzen zaiolarik, bistan da matematikalaria ez dela horrekin erraz konformatzen. Aurkikunde berriak, aurkikundeak, behar ditu teoria honen orokortasuna eta, hartaz, teoria bera tresna efektibotzat har ditzan. Egun, horrelako aurkikunderik ezagutzen da, bai algebra homologikoan, bai geometrian... bai, oro har, intuizionist Matematikan. Baita ere –eta agerian da honen garrantzia– "Matematikaren oinarri" deitu axiomatika, nahiz Zermelo-Fraenkel nahiz Gödel-Bernays moduan, unibertsu axiomatu batez orokortzen denean (Lawvere: "An elementary theory of the category of sets" (1964); "The category of categories as a foundation for mathematics" (1966)).

Jesus Mari Larrazabal

Ohar:

Kategorien teoria landu nahi duenak honako lau liburuotan aurkituko du hasteko aski gai, eta bibliografia hedatuagoa ere bai.

— P. Jaffard-G. Poitou: "Introduction aux catégories et aux problèmes universels". (Paris, Ediscience 1971)

— I. Bucur-A. Deleanu: "Introduction to the theory of categories and functors". (London, Wiley-Interscience Pub. 1968)

— S. Mac Lane: "Categories for the Working Mathematician" (New York, Springer-Verlag 1971)

— C. Ehresmann: "Catégories et Structures" (Paris, Dunod 1965)