

DA GIPUZKOAKO

DONOSTIA HIRIBURUA

Lantxo honen izenburuak ez du izan nahi azken boladaotan azaltzen ari diren elaberri horietako baten hasiera: gure asmoa matematikaz aritzea da, baina matematika barruan sail berezi bat ukituz, logika matematika deitutako zatia hain zuzen ere.

Aurrera jarraitu baino ohen ohar nagusi bat azpimarkatu nahi nuke indar bi inak, eta ohar hori hauxe da: logikaz baino gehiago zientzia honek eduki dezakeen aplikazioen arduratuko gara.

Zergatik sartu behar da zientzia mota hau gure programetan? non dago beharra? logika ez ahal da ikurrez betetako zientzia bihurri bat? logikak ez ahal du eskatzen abstrakzio itugarri haundi bat? haur batek uler ahal dezake zientzia hau? Galdera hauk eta beste zenbaitzu gehiago behar bada ere egiten dira askotan logikaren izena aipatzerakoan. Justifikazio bat bilatu beharrean sentitzen dut nere burua eta hona hemen justifikazio izenez nere arrazoiak:

a) Baldin logika, bere sakontasun osoan hartuta, oso zientzia abstraktoa dela onhartu behar bada; ez da apalago esan behar bere lehen oinak oso intuitiboak direla. Eta oin hauk dira, eta ez zientzia osoa, gure instant honetako aztergaiak; eta inak honek, esandakoaren frogan inak nahi luke.

b) Zientziak betidanik inak duen ametsik maiteena, proema guztiak askatuko bide bakar eta zihur bat bilatzea inak da. Ideia orokorren ametsa; gauza desberdin askoren atzetik dagoen egia bakarra. Logika ez da altxor hori, logikak ez ditu prolema guztiak askatuko; baina bada ordea, eta hemen datza bere garrantzia, gauza desberdin askotarako erabil daitekeen argi bizia. Pedagogia, zientzia denez gero, orokortasunaren aldekoa da.

Logika zerbait intuitibo eta orokorra dela frogatuko bagenu (bere hasieran noski) gure helburua erabat beteta kontsideratuko genuke.

Lantxo honetan jarraituko dugun metodologia hauxe da:

Logikari buruzko lehen ideia ximple eta oinarrizkoak eman.

Idea horietaz baliaturik, matematika prolema batzuk azaldu.

1. LOGIKA:

1.1 Esakun logikoak

Hitzak esakunen elementuak dira; hots, hitzez osaturik azaltzen dira esakunak; baina esakun logiko bat osatzeko ez da nahikoa esandakoarekin; zeren eta esakun logiko bat izateko hitz multzo horrek esannahi bat gorde behar du, bestela hitz multzo hori ez da esakun logiko bat.

Gogora dezagun izenburuko esakuna:

Da Gipuzkoako Donostia hiriburua

Hitz multzo honek ez du deus esan nahi, eta ondorioz ez da esakun logiko bat; hitz multzo berdinez baliaturik; hots (da, Gipuzkoako, Donostia, hiriburua) multzoaz, beste honako hauk ere osa ditzakegu:

Gipuzkoako hiriburua Donostia da

Donostia da Gipuzkoako hiriburua

Gipuzkoako hiriburua da Donostia

Donostia Gipuzkoako hiriburua da

Esakun guzti hauk logikoak dira, esannahi argi bat azaltzen bait dute.

Esakun logikoak osatzeko sintaksiaren legeak errespetatu behar dira, eta lege hauek ordena bat eskatzen dute.

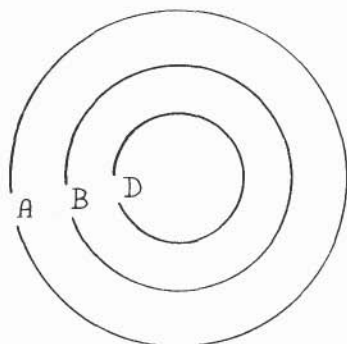
Sintaksia, bere , ordena bat da; hots, hitz multzoari esannahi bat ematen dion ordena

1.2 Proposizioak

“Gipuzkoako hiriburua Donostia da” esakun logiko bat irate gainera, proposizio bat da /erbait baieztatzen bait du. Esakun honek Donostia, ez besterik, Gipuzkoako hiriburua dea adierazten du.

Badago beste esakunik, esannahi logiko bat eduki arren, deus ere baieztatzen ala ukatzen ez duenik, eta beraz proposizio ez denik.

“Gipuzkoako hiriburua Donostia da”	Proposizioa	Baiezkorra
“Gipuzkoako hiriburua ez da Donostia”	Proposizioa	Ezezkorra
“Etorri zaitetz oraintxe”	Ez da proposizioa	



- A Hitz nahasketa
Da Gipuzkoako Donostia hiriburua
- B Esakun logikoa
Gipuzkoako hiriburua Donostia da
- D Proposizioa
Gipuzkoako hiriburua Donostia da

proposizioena da guri interesatzen zaigun esakun logiko mota, eta hemendik aurrera horietan arduratuko gara.

Proposizioak atomikoak ala molekularrak izan daitezke; adibidez.

Proposizio atomikoa: Andoni mutila da

Proposizio molekularra: Andoni mutila da eta bilbotarra da

Proposizio molekularrak atomikoez osaturik daude eta osatze lan honetan esaldiak lotzen dituzten elementuak konektagailuak dira.

Goiko kaso honetan, “eta” da konektagailua.

Oraingoz behinik behin, proposizio atomikoez hitz egingo dugu, molekularrak beste batetarako utziz.

1.3 Proposizioen sailketa edo klasifikazioa

ehenagotik esana dugun bezaka, proposizioak bi motetakoak izaten dira:

- a) Baiezkorrak – Baieztatzen dutenak
- b) Ezezkorrak – Ukatzen dutenak

Proposizio baiezkor bakoitzari ezezkor bat dagokio eta alderantziz ere berdin.

Andoni mutila da
Andoni ez da neska

Andoni ez da mutila
Andoni neska da

1.4 Proposizioen zuzentasuna eta okertasuna

Proposizio batek baieztatzen edo ukatzen duena zuzena ala okerra izan daiteke, baina ez beste ezer. Hau da, dudarik gabe, proposizioak duen propietateetan nagusienetako bat.

Esandakoa zuzena ala okerra da beste irtenbiderik gabe.

Andoni mutila da zuzena
okerra

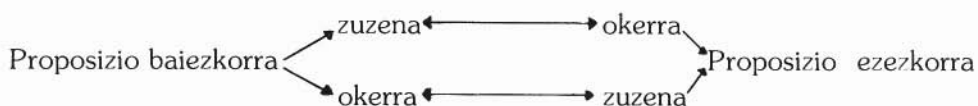
Andoni neska da zuzena
okerra

Andoni ez da neska zuzena
okerra

Andoni ez da mutila zuzena
okerra

Noi esaten da proposizio bat zuzena dela? Proposizioak esandakoa eta esperientia bat etortzen direnean; beste kasoan, hots, bat etortzen ez direnean okerra da.

Proposizio baiezkor bat zuzena denean, berari dagokion ezezkorra okerra da, eta alderantziz ere, hala gertatzen da; beheko eskema honetan azaltzen dira erlazio horik:



Lehenago aipaturiko esaldiak eskema honen adibideak dira.

Honeraino proposizioaren kontzeptua alde batetik eta bere motak eta propietateak bestetik azaltzen saiatu gara; kontzeptu guzti hauk oso intuitiboak dira eta beraz ulerterrazak. Kontzeptu hauek zer nolako aplikazioak eduki ditzaketan esplikatzen nahi genuke, bereziki matematikan.

Horretarako matematikan asko erabilzen diren bi arlo ikutuko ditugu; lehenengoa “izate elkarpedea”, eta bigarrena “berdintasun elkarpedea”.

2.1 Izate elkarpidea

Elementu bat multzo batekoa den ala ez definitzen duen elkarpidea da hau,
 $a \in A \rightarrow a$ hada A-koa

$$A = \{a, b, d, e\}$$

$$l \notin A \rightarrow l, \text{ ez da A-koa}$$

Matematika erlazioek badute bere sintaksia ere, sintaksi hau oso ximplea da, eta ondorengo lege honetan dago bere eskakizun bakarra:

ehenengo elementua, ikurra, bigarren elementua.

$$\begin{array}{ccc} a & E & A \\ & \notin & A \end{array}$$

Honek, beste ikuspuntutik begiratua, $A \in a, E A a, \notin a A, \notin l A$ eta sintaksi hori gorde egiten ez duten espresio guztiak esannahi gabeko espresio direla esan nahi du:

$$\begin{array}{ccc} \text{Da Gipuzkoako Donostia hiriburua} & \longleftrightarrow & A \in A \\ \text{Gipuzkoako hiriburua Donostia da} & \longleftrightarrow & a \in A \end{array}$$

Proposizioak be'ala, elkarpideak ere, baiezkorrak ala ezezkorrak izan daitezke

$$\begin{array}{cc} a \in A & a, A\text{-koa da} \\ a \notin A & a, \text{ez da } A\text{-koa} \end{array}$$

eta "zuzena ala okerra" bitasunetik ez dute eskaporik.

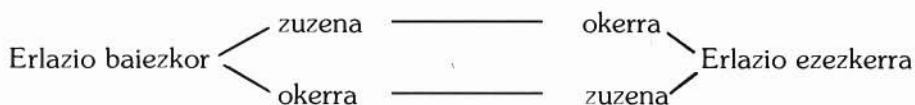
$$\begin{array}{cc} a \in A & \text{zuzena da} & a \notin A & \text{okerra da} \\ l \in A & \text{okerra da} & l \notin A & \text{zuzena da} \end{array}$$

Unibertso bezala, elementu eta multzo posible guztiez osatuko multzoa kontsideratuz gero, eta Unibertso horren edozein bikote harturik zuzena ala okerra den erlazio baiezkor bat sortzen da, eta zuzena ala okerra den beste ezezkorra.

Adibidez:

$$\begin{array}{l} (2, \mathbb{N}) \text{ bikoteak} \\ 2 \in \mathbb{N} \text{ erlazio baiezkor eta zuzen bat} \\ \text{eta } 2 \notin \mathbb{N} \text{ erlazio ezezkor eta oker bat sortzen ditu} \end{array}$$

Hemen ere, proposizioen artean zegoen lotura azaltzen da, beheko eskema honetan azaltzen den bezala.



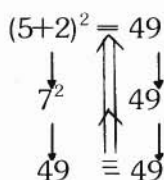
$\frac{2 \in \mathbb{N}}{2 \in \mathbb{N}}$ baiezkor zuzena $\frac{2 \notin \mathbb{N}}{2 \in \mathbb{N}}$ ezezkor okerra
 $\frac{2 \in \mathbb{N}}{2 \in \mathbb{N}}$ baiezkor okerra $\frac{2 \notin \mathbb{N}}{2 \in \mathbb{N}}$ ezezkor zuzena

2.2 Berdintasun elkarpedea

Berdintasun gaia aipatzerakoan, eta gauzak oinarritzeko gogotan asi bait gara, identitatea eta berdintasuna zertan bereizten diren aipatzea komenigarri deritzagu.

$7=7$ identitate bat da
 $(5+2)^2 = 49$ berdintza bat da

Zergatik asken honi berdintza eta besteari identitatea? Bigarren hau ebidente ez den identitate bat delako.



Goiko berdintza beheko identitatean oinarritzen da.

Berdintasuna elkarpede bat da, eta, beraz, proposizio moduan esplika daiteke.

$5+2 = 7$; berdintzak, $(5,2)$ bikoteari batuketa dela medio, 7 emaitza dago kiola baiezen bait du.

$5 \cdot 2 = 8$ berdintzak, $(5,2)$ bikoteari, biderketa dela medio, 8 emaitza dago kiola baiezen du.

Berdintzek ere ba dute bere sintaksi berezia; sintaksi hau ondorengo lege honetan laburtzen da:

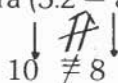
Gaia ikurra Gaia berdintza emaitza
 5 . 2 = 8

Berdintza, proposizioak bezala baiezkorra ($5 \cdot 2 = 8$) eta ezezkorra ($4+3 = 7$) izan daiteke,

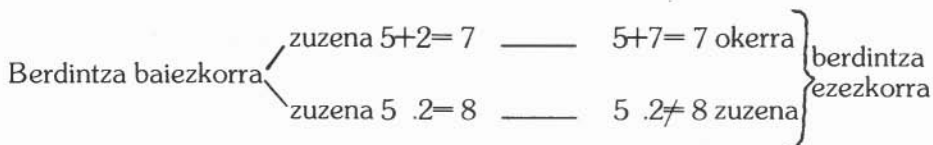
bai zuzena ($5+2 = 7$)



ala okerra ($5 \cdot 2 = 8$) ere.

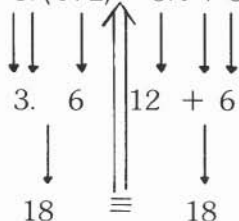


Eta proposizioak erlazionatzen diren era berean, erlazionatzen dira berdintzak ere.



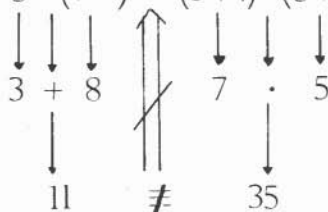
Berdintza baiezkor zuzena

$$3 \cdot (4+2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$$



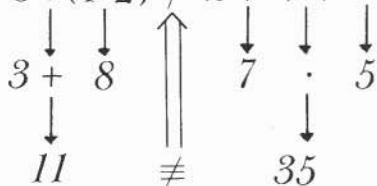
Berdintza baiezkor okerra

$$3 + (4 \cdot 2) = (3+4) \cdot (3+2)$$



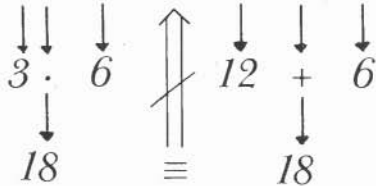
Berdintza ezezkor zuzena

$$3 + (4 \cdot 2) \neq (3+4) \cdot (3+2)$$



Berdintza ezezkor okerra

$$3 \cdot (4+2) \neq (3 \cdot 4) + (3 \cdot 2)$$



Gaia ez da hemen bukatzen, ez eta gutxiago ere, baina luze xamar jotzen ari da, eta hasiera batetan guk geure buruari jarri diogun helburua, hots, ideia honen intuitibotasuna eta orokortasuna? frogatzea, aski lortuta dagoela pentsaturik, hona hemen taula hau bukaera gisan:

PROPOSIZIOAK

IZATE ELKARPIDEA

BERDINTASUN ELKARPIDEA

Elementuak:

Elementuak:

Elementuak:

hitzak.

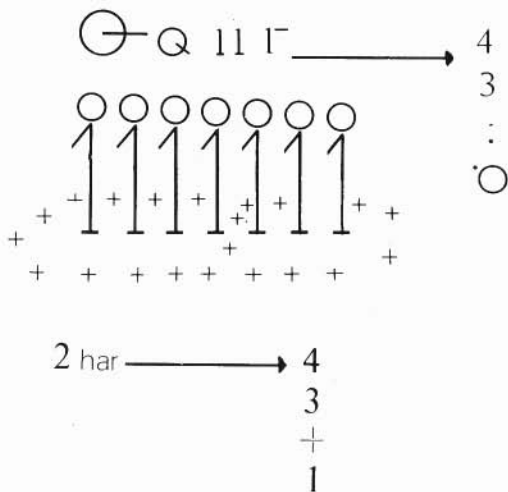
elementuak eta multzoak.

zenbakiak eta ikurrak.

Hitz nahasketa

IKUR NAHASKETAK

Noiz
 etorriko da
 da
 da-nok
 da-nok
 espero
 du
 du
 du-gun
 du-gun
 e-gun-a
 e-gun-a
 ?



Proposizioa:

Elkarpidea:

Berdintza:

Andoni mutila da.
 Andoni ez da mutila.

2 E N
 2 \notin N

4 + 3 = 1
 6(2 + 4) \neq 6.2 + 6.4

Proposizioa:

Elkarpidea:

Berdintza:

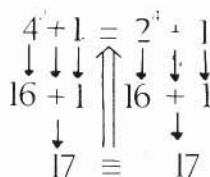
zuzena:

zuzena:

zuzena:

Andoni mutila da.

2 E N



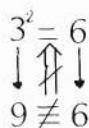
okerra:

okerra:

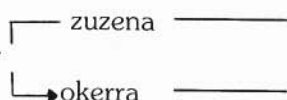
okerra:

Andoni neska da.

3 \notin N



Baiezkor



okerra
 Ezezkorra
 zuzena

Unibertsoa:

Unibertsoa:

Unibertsoa:

Proposizioen multzoa.

Elementu eta multzoez Zenbaki osaturik bikoteen osaturiko bikoteen multzoa.