Z — MULTZOA

Ondorengo lerro hauetan irakur dezakezuna hauxe da: Z multzoa zer den esplikatzeko bide bat.

Lan hau 11-12 urteko neska-mutikoei eginik dago, eta fitxa batzuekin osatzen da. Lan hau zati teorikoa da beraz.

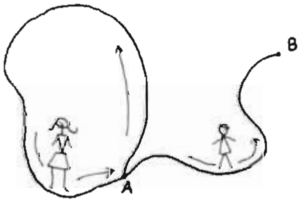
Z multzoa zer den esplikatzeko bide asko dago; guk desplazamenduen bidea aukeratu dugu. Zergatik?

Errrealitatearekin lotura handiagoa daukalako beste bideak baino. Eta ez horregatik bakarrik, multzo honen barruan gertatzen diren eragiketak adierazteko oso bide egokia delako baizik.

Besterik gabe desplazamenduetaz hasiko gara.

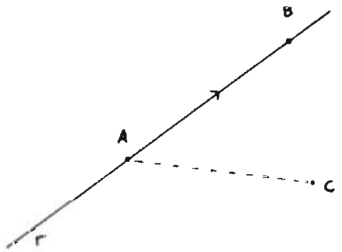
DESPLAZAMENDUAK

Desplazamendua, posizioaren aldaketa da; adibidez, A-tik B-raino joan den mutila desplazatu egin da, bere posizioa aldatu bait du.



Baina neska, ordea, bere bide guztia bukatzean, ez da desplazatu, bere posizioa ez bait da aldatu.

Desplazamendu mota guztiak oso interesgarriak izan arren, guretzat linea zuzen baten barrutian gertatzen direnak dira garrantzitsuenak; honekin zera esan nahi dugu: posizioa aldatzean zuzen baten barrutik ez garela inolaz ere aterako, saio honetan.



Gure ibilbidea **r** zuzena bada, AB desplazamendua zilegi izango da, baina AC ez da onartua izango, AC bidea zuzenetik kanpora bait doa.

Zuzen baten barrutian gertatzen diren desplazamenduak, "ZUZEN BATEN BARRUKO DESPLAZAMENDUAK" deritza.

ZUZEN BATEN BARRUKO DESPLAZAMENDUAK

Errazago delako eta beste arrazoirik gabe, erabiltzen den zuzena horizontala izaten da.

Pentsa dezagun ziklista bat A-tik B-raino higitu dela; bere posizioa aldatu bait du, desplazatu egin dela esan dezakegu; desplazamendu honi AB desplazamendua deritzo, honako bi puntu hauk bereziz:

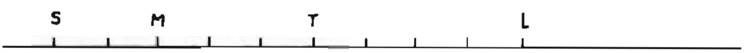
A abiaburu puntua. (Hasierako posizioa)
B helburu puntua. (Bukaerako posizioa)

Gauzak hala izanik, desplazamendu edozein bat definitzeko, abiaburua zein den eta ondoren bai eskuinetara bai ezkerretara zenbat bide egin behar dugun adierazi beharko da. Adibidez:

M abiaburua

M-tik 7cm. eskuinetara

Honela definitu behar da ML desplazamendua.



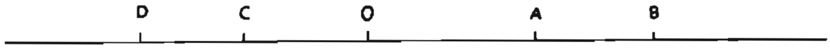
T abiaburua

M-tik 5 cm. ezkerretara

Honela definitu behar da TS desplazamendua.

ABIABURU BAKARREKO DESPLAZAMENDUAK

Desplazamenduek, berez, edozein abiaburu eduki dezakete, baina guk abiaburu bakarrekoak aztertuko ditugu hemendik aurrera; hots, puntu ezagun, bakar eta lotu batetik hasten diren desplazamenduak. Puntu honi JATORRIZKO PUNTUA deitu ohi zaio, (O puntua).

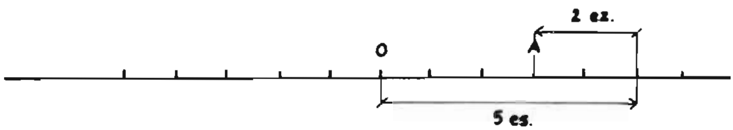


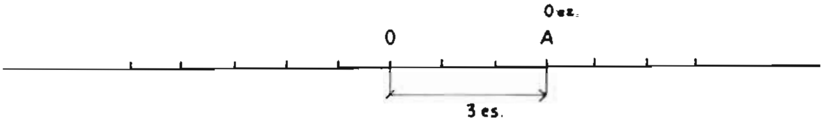
Guk kontsideratutako desplazamenduak OA, OB, OC, OD motakoak izango dira, O abiaburu puntua duten desplazamenduak, alegia.

Holako desplazamendutan abiaburua zein den ez da esan beharrik, eta beraz eskuinetara edo ezkerretara zenbat jo behar dugun esatea nahikoa dirudi; halaz eta guztiz, gauzak oraindik errazago egiteko, honako era honetan egitea erabaki da:

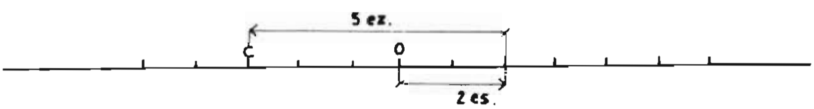
> Bikote baten bidez definitzen da desplazamendua. Bikote horren lehenengo atalak eskuinetara zenbat, eta bigarrenak azken puntu hontatik ezkerretara zenbat adierazten dute.

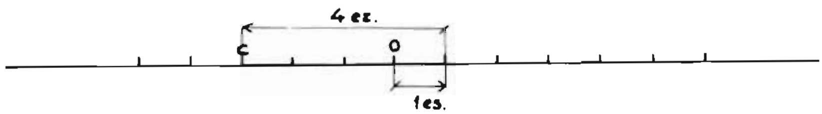
OA desplazamendua, (5,2) bikotearen bidez defini daiteke, eta (3,0) bikotearen bidez ere bai.

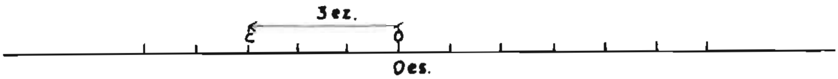




OC desplazamendua (2,5), (1,4), (0,3) bikoteek eta beste bikote batzuek definitzen dute.

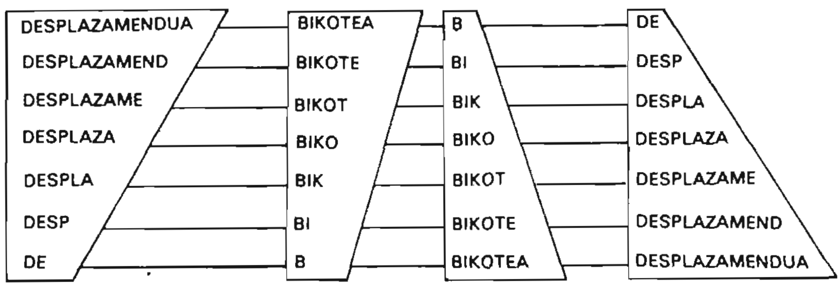






Desplazamendu bat definitzeko ez dago "bikote bakar bat" nahiz eta "bikote desberdin askok" defini dezakeen "desplazamendu bakar bat".

DESPLAZAMENDUA BIKOTE BATEN BIDEZ DEFINITZEN DA.



BIKOTE batek **DESPLAZAMENDU BAT** definitzen du.

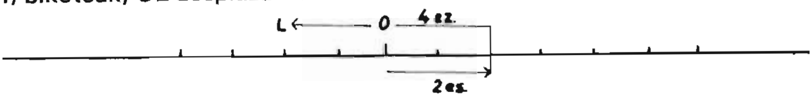
$$\left\| \begin{array}{l} a \in N \\ b \in N \end{array} \right. \Rightarrow (a, b) \longrightarrow$$

DESPLAZA
MENDUA

$\overrightarrow{}$ a

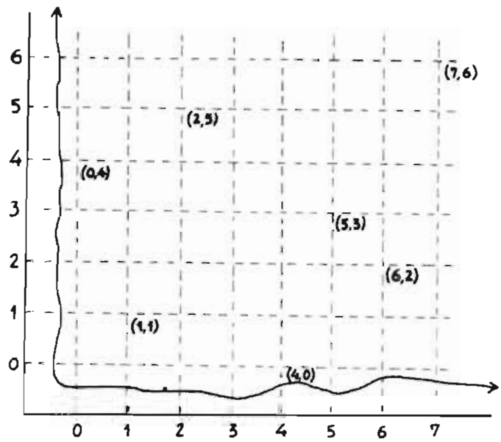
$\overleftarrow{}$ b

(2,4) bikoteak, OL desplazamendua definitzen du.



BIKOTEEN MULTZOA

Bi zenbaki arruntek bikote bat osatzen dute. Holako bikote bat, bikote posible guztien multzoko elementu bat da; multzo honi B izena emango diogu eta beheko marrazki honetan daukazu adierazita.



Sare honen puntu bakoitzak bikote bat definitzen du.

Multzo honek infinito elementu du eta horregatik ezin dira denak adierazi; hemen duguna, multzo guztiaren zati bat besterik ez da.

B multzoa eta N × N mulmultzoa gauza bera dira.

B = N × N

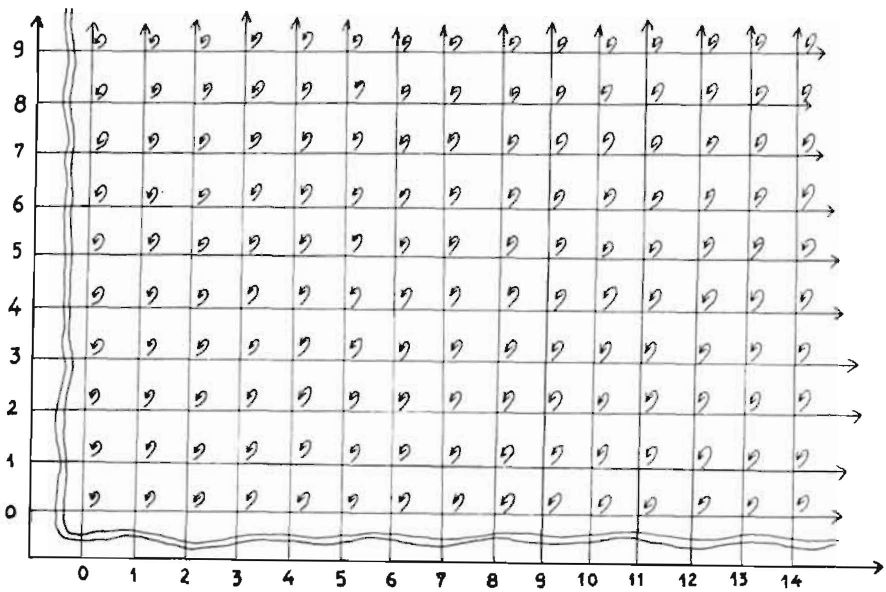
Bikotez osatutako multzo hau izango da gure aztergaia oraingo lan honetan:

Multzo honen barrutian elkarpide asko defini daitezke, baina guzti horien artean bi izango dira guk istudiatuko ditugunak: baliotasun eta berdintasun elkarpideak alegia.

a) **Berdintasun elkarpidea**

(a,b) eta (c,d) bikoteak berdinak dira baldin, a = c eta b = d badira eta ez beste inoiz.

$$(3,5) = (3,5)$$
$$(4,2) \neq (3,5)$$

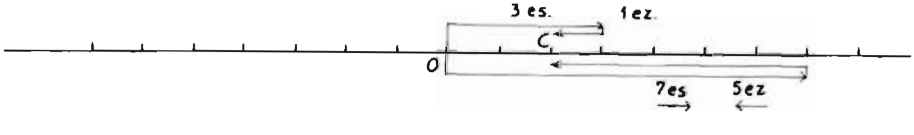


Elkarpide honek ez digu deus ere laguntzen multzo honen klasifikazio edo sailketa bat egiteko; bakoitza bere buruaren berdina bait da bakarrik, lehen bezain konplikatua geratu zaigu multzoa.

b) Baliokidetasun-elkarpidea

Helburu puntu berdina duten bi bikote baliokideak direla esan ohi da.
(a,b) R (c,d) (a,b) eta (c,d) bikoteek helburu berdina dute.

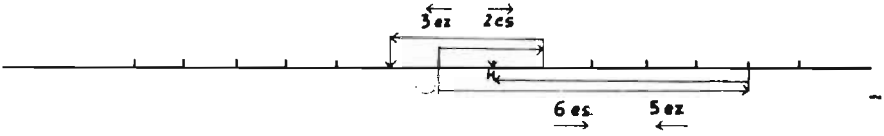
Adibidez: (7,5) eta (3,1) bikoteak baliokideak dira, biek C puntua bait dute helburu.

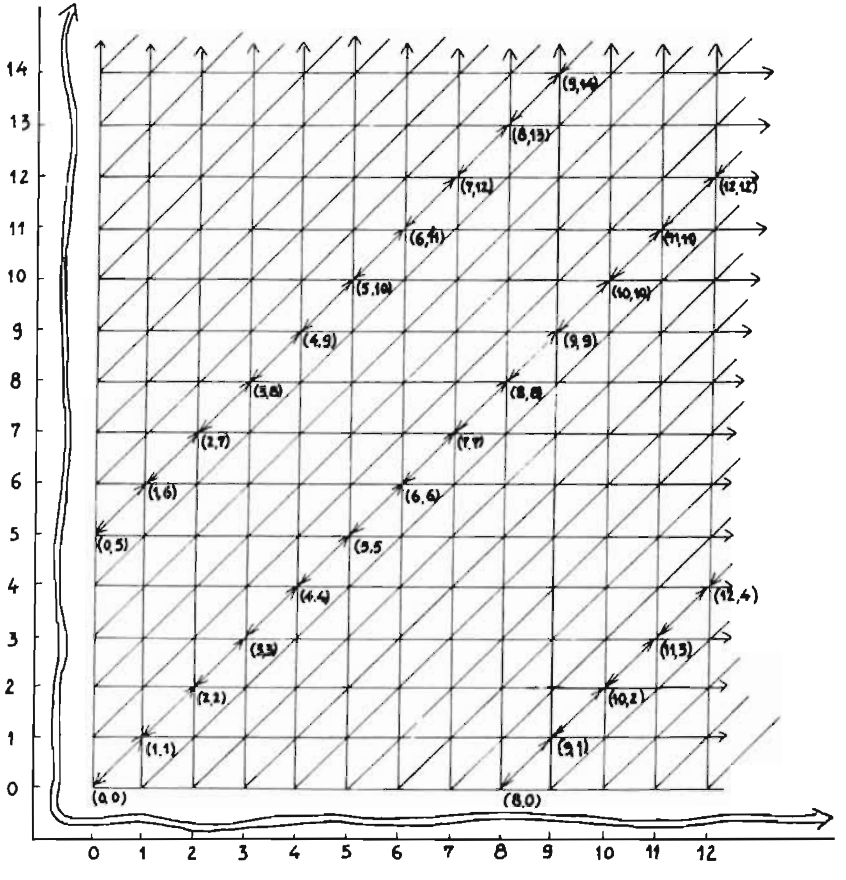


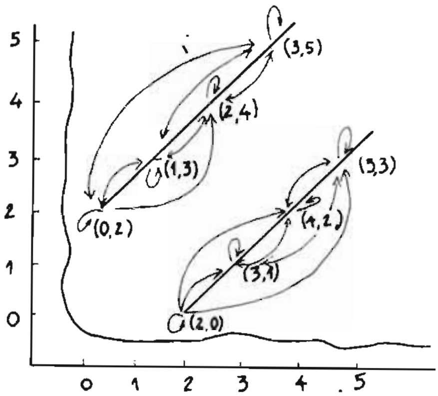
(7,5) R (3,1) erlazioa irakurtzeko, beheko sistema hau jarraituko dugu:
(7,5) (3,1)   (7,5) eta (3,1) baliokideak dira. (7,5) bikotea erlazionaturik dago (3,1) bikotearekin.

Bestaldetik

(2,3) bikotea ez dago erlazionaturik (6,5) bikotearekin beren bi helburu puntuak desberdinak bait dira.



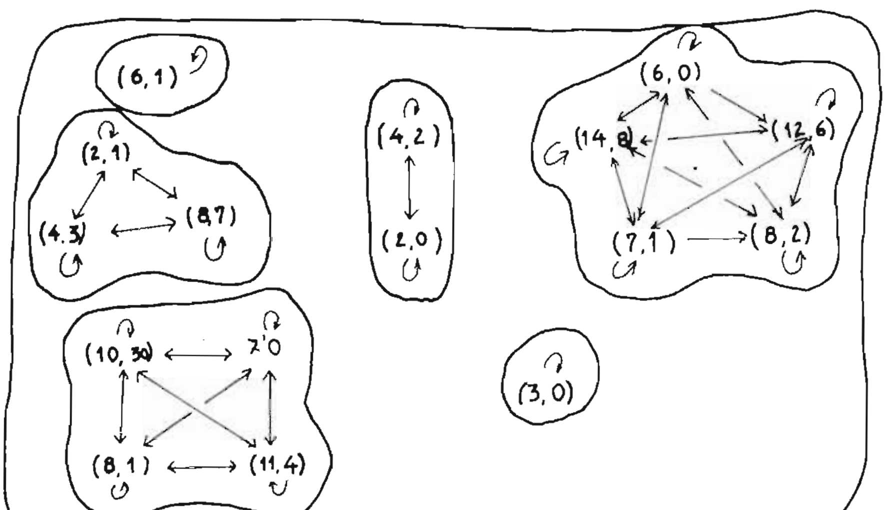




Holako linea batetan sartuta dauden bikote guziak baliokideak dira. Eta linea batetan dagoena ez da baliokide izango beste linea desberdin batetan dagoen edozeinekin.

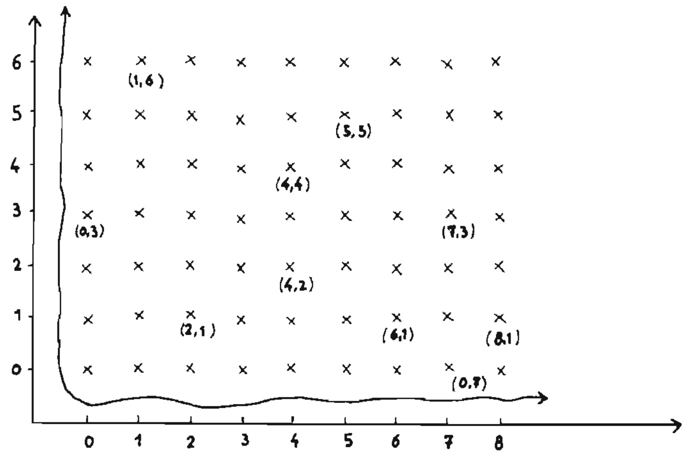
$(6,4) \sim (5,3)$ $(4,2) \nsim (2,4)$

Gauzak hala ikusita, linea bakoitzak klase bat osatzen du.



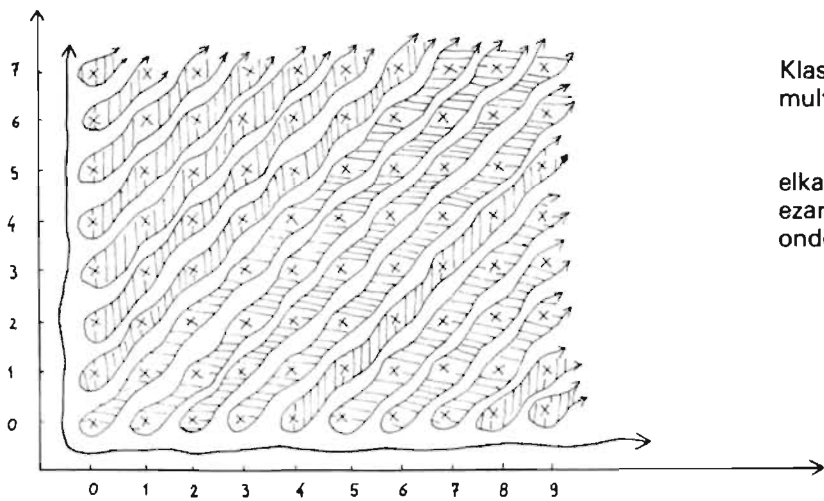
L multzoa N × N multzoaren azpimultzo bat da, eta honetan baliokidetasun elkarpidea ezarri dugu. Goiko marrazkian azaltzen dena, elkarpide honen azkon marrazkia da.

R elkarpide honek sailkatuta utzi digu multzoa, klaseeran sakabanatuta. Holako klase bakoitzari BALIOKIDETASUN KLASEA deitzen diogu.



N x N
multzoa

elkarpidea
ezarri
baino
lehenago.

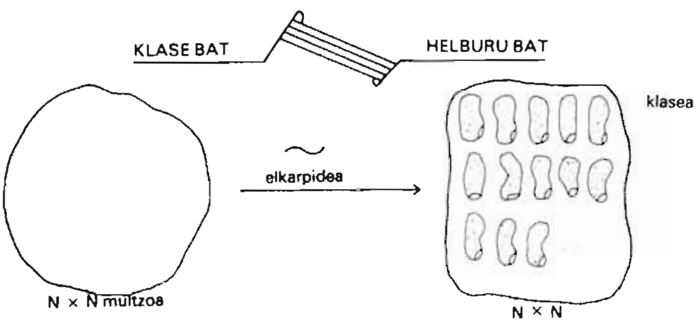


Klaseen
multzo

elkarpidea
ezarri
ondoren.

Edozein bikote, klaseren batetan sartuta dago.
Klase batek bikote asko biltzen du.

Zuzenaren puntu bakoitzak klase bat definitzen du.
Bikote batek helburu bakar bat du.
Helburu bati bikote asko dagokio, klase oso bat



KLASEAREN ORDEZKARI KANONIKOA

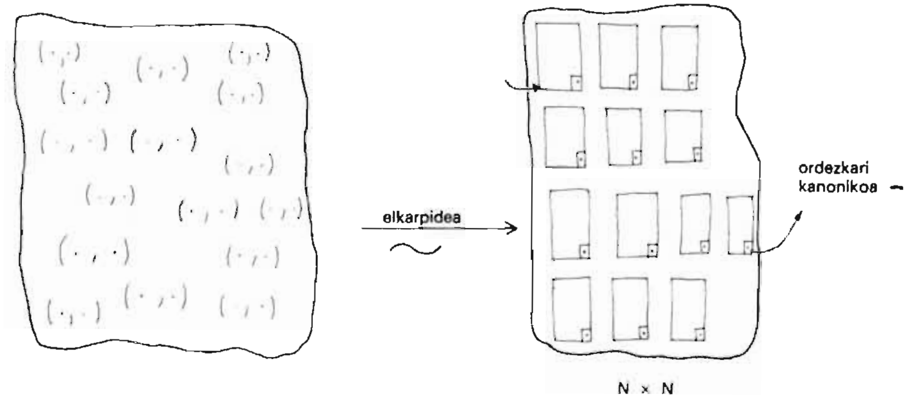
Klase batetan bukaezin edo infinito bikote dago eta denak desberdinak. Klase horietako edozeinek klase guztia definitzen du; honekin, bikote hori aipatu ondoren, klasea zein den badakigula esan nahi dugu; adibidez:

(5,7) bikoteak, bera sartuta dagoen klase osoa definitzen du, eta gauza bera gertatzen da (4,3) bikotearekin.

Izan ere, klase osoa adierazteko bikote guztien artean xinpleena aukeratzen da; eta zein da, xinpleen bezala kontsideratzen dena? "**atalen artean zero bat dadukana**".

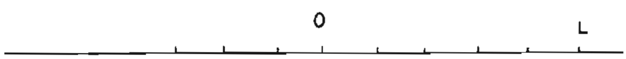
(6,1) ez da kanonikoa, bere bi atalak 6 eta 1 direlako
(3,0) bai, kanonikoa da.
(0,2) eta (0,0) ere bai.

"Klase bakoitzari ordezkari kanoniko bat dagokio"

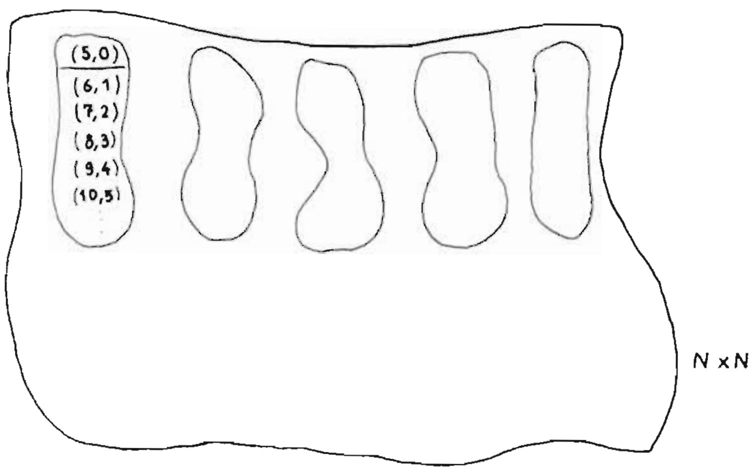


ADIBIDEA:

OL desplazamendua definitzeko bikote klase oso bat dago.



T klasea da OL desplazamendua definitzen duena.
T klase honen ordezkari kanonikoa (5,0) bikotea da.



ZENBAKI OSOA

0-tik eskuinetara dauden puntu guztiei zenbaki bat erantsi nahi izanez gero, ez dugu inongo oztoporik izango;
(0,0) ordezkari kanonikoa duen klaseari 0 zenbakia eman bait diezaiokegu.
(1,0) ordezkari kanonikoa duen klaseari 1 zenbakia.
(2,0) " " " " 2 "
eta hala beste mota honetako klase guztiei.

Lan honetan N multzoko elementu guztiak erabiliko bagenitu (eta oraingoz ez bait dugu besterik ezagutzen, ezin beraz erabili) zenbakirik gabe geldituko ginateke, 0-tik ezkerretara dauden puntuak eta klaseak izendatzeko.

Arazo hau zuzendu nahiak soluzioa bilatzera bultzatzen gaitu eta gaur egun onartuta dagoena beheko hau da.

0-tik ezkerretara dagoen lehenengo zenbakiari 1 (minus bat) zenbakia erantsiko diogu.
0-tik ezkerretaa dagoen bigarrenari 2 (minus bi) zenbakia.
0-tik ezkerretara dagoen hirugarrenari 3 (minus hiru) zenbakia.

Berez ez dago arrazoi bat aukera hau egiteko, eta egin bada erraztasunaren izenean egin da, besterik ez.

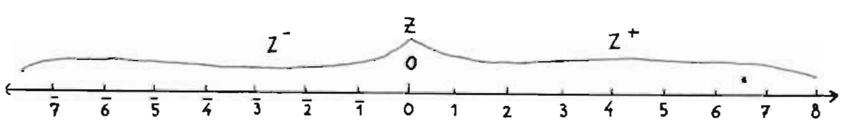
0-tik eskuinetara dauden zenbakiei positibo izena ematen zaie, eta 0-tik ezkerretara daudenei berriz, negatiboak.

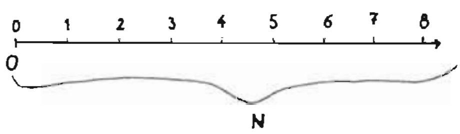
Positiboak izendatzeko "plus" aurrizkia jartzen da.

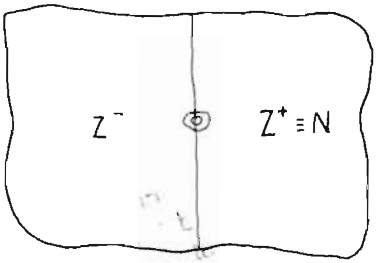
3 (hiru edo plus hiru) POSITIBOAK

4 (minus lau) NEGATIBOAK

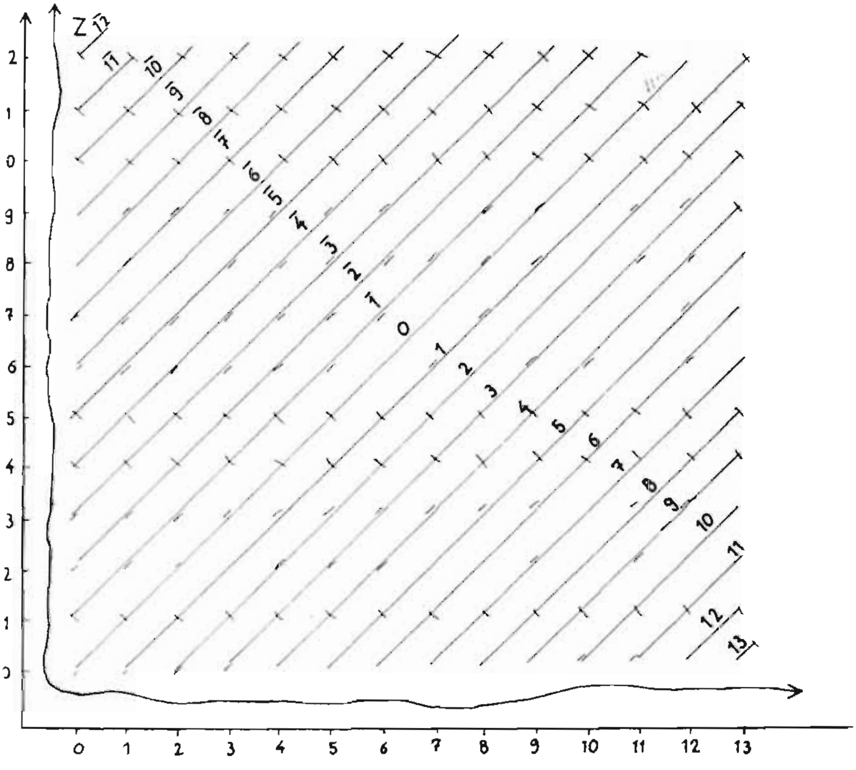
Hala definitutako zenbakiak, Z ENBAKI OSOAK deritza.







3 zenbakia, arrunta eta osoa da.
$\bar{3}$ ordea, osoa da baina ez arrunta.
N, Z-ren azpimultzo bat da. Arrunt guztiak osoak dira, baina oso guztiak ez dira arruntak izaten.



Zenbaki oso bakoitza bikotez osatutako klase baten ordezkaria da.

$\overset{+}{10}$ ⟶ {(10,0), (11,1), (12,2), (13,3), (14,4), (15,5)........................

$\bar{6}$ ⟶ {(0,6), (1,7), (2,8), (3,9), (4,10), (5,11)..............................

ZENBAKI OSO BATEN BALIO SOILA

Zenbaki oso bati dagokion seinua (bai "plus", bai "minus") kentzen badiogu, zenbaki arrunt bat bihurtuko da.

Adibidez:

$|3| \longrightarrow = 3$
$|\bar{4}| \longrightarrow = 4$
$|\bar{3}| \longrightarrow = 3$

Elkarpide honen bidez, zenbaki oso bakoitzari dagokion arrunta, bere balio soila da.
3, 3ren baliko soila da eta

$|3| =$ 3 berdintzaren bidez adierazten da.
$|\bar{5}| =$ 5 (minus bosten balio soila bost da)
$|10| =$ 10 (plus hamarren balio soila hamar da)