Eragiketak (II)

BIDERKETA

Biderketa aztertzera abiatzen garenean, biderketak errealitateko munduarekin zer erlazio duen argitzea logikoa dirudi; beste era batetan esateko, zein da biderketaren esannahia?

Eta eman behar dugun erantzuna honako hau da: biderketa, berez, ez da eragiketa berri bat, batuketa batzuen sinplifikazio bat baizik. Eta beraz, asmaketa matematiko bat bezala onartu behar dugu. (Arautasuneko kasoetan, bai, izango litzateke posible beste argibide bat ematea, baina ez gara gauza horietan sartuko).

Honela izanik, batuketaren sinplifikazio gisan azaltzen zaigu biderketa. Orduan batuketatik etorria bezala konsideratu behar dugu biderketa; baina edozein batuketa mota adieraz ahal daiteke biderketa baten eran? Ez; batuketaren batugai guztiak berdinak direnean bakarrik, eta ez beste inoiz, egin daiteke hori.

Beraz, $a \times b$ biderketak, a, b bider «BATU» behar dugula adierazten du.

$$a \times b = \overbrace{a + a + a \ldots + a}^{b}$$

$3+3+3+3+3=15$ Batuketa eran

$3+3+3+3+3=3 \times 5=15$ Biderketa eran.

$1 \times 1=1 \quad =1$	$2 \times 1=2 \quad =2$	$3 \times 1=3 \quad =3$
$1 \times 2=1+1 \quad =2$	$2 \times 2=2+2 \quad =4$	$3 \times 2=3+3 \quad =6$
$1 \times 3=1+1+1=3$	$2 \times 3=2+2+2=6$	$3 \times 3=3+3+3=9$

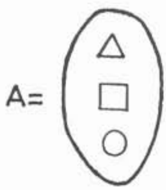
Ikusten den bezala, hemen azaldu dugun biderketaren definizioa, berez, konbenio bat besterik ez da; eta zergatik egiten da konbenio hori? definizio honek praktikan oso baliogarri dela frogatu duelako; eta egia aitortzeko, ezin dugu gehiago esan.

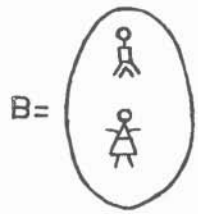
Orain arte beste bide bat ez edukitzeagatik, honela konsideratu izan da biderketaren asuntua; adibiderik ezin balitz jarri, eta guztia definizio huts bat bezala ikas arazi behar bagenu, gure eginbeharrak ez lirudike oso erraza. Denok dakigu nola ikasi ditugun «biderketaren taulak» deitzen diren zerrendak, buruz eta ezer ulertu gabe, ulertzeko ere ezer ez zegoelako noski. Horregatik, eta errealitatearekin beste lokarririk ez bait dago, ikuspegi hontatik begiratzen bada behintzat, behin eta berriz biderketa eta batuketa lotzen duen erlazioa gogoaraztea, oso garrantzi handikoa iruditzen zait.

Hemendik aurrera azaltzen den bideak, egia esateko, ez du lehen esan duguna ezer aldatzen; hemen ikuspegi pedagogikoago bat ematen saiatuko gara soilik; hau da, ulertzeko eta ikas arazteko errazagoa. Bide hau multzoen teorian oinarrituta dago.

Begira nola esplika daitekeen bide hau.

1. — Har ditzagun A eta B bi multzo



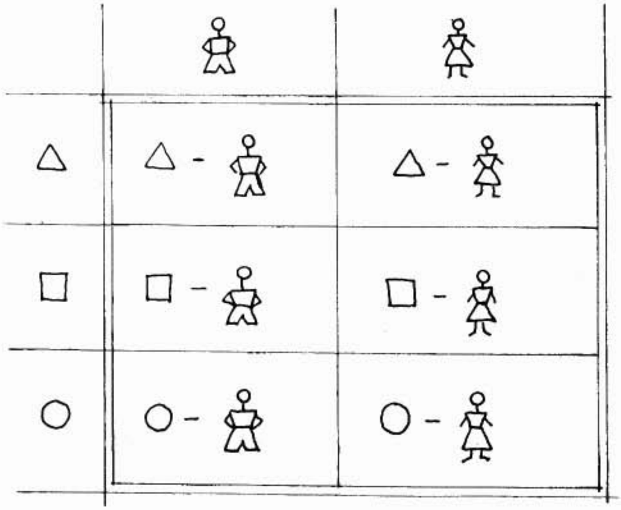


A = (Hiruki, Lauki eta Borobil bana)

B = (Ander, Jone)

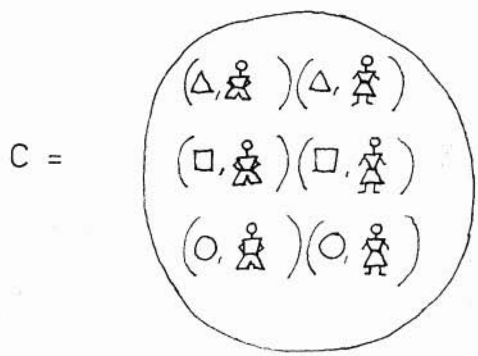
2. — Egin ditzagun orain, A-ko eta B-ko elementuekin bikote posible guztiak, baina baldintza batekin: bikotearen lehen elementuak A multzokoa izan behar du, eta bigarrenak B multzokoa.

Bikote guztiak —bat bakarrik ere ahaztu gabe— idazteko eta ordena bat jarraitzeko, taula baten bidez egiten da zati hau.



Aldameneko taula hontan ditugu jarriak, ezarri ditugun baldintzak beteaz osa daitezken bikoteak.

3. — Konsidera dezagun orain bikote hauekin osatutako multzo berri hau; multzo honi C deituko diogu.



Konta ditzagun A-ko elementuak	3 dira
Konta ditzagun B-ko elementuak	2 dira
Konta ditzagun C-ko elementuak	6 dira

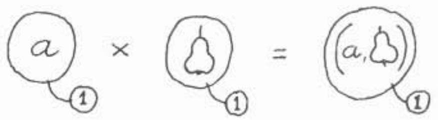
* Baina $3 \times 2 = 6$

(* izartxo honekin markatutako pausoa, guretzat beharrezkoa da biderketaren legea betetzen duela ikusteko, baina ez zaio haurrari esan behar).

Orduan C izango da $A \times B$ multzoa. (Hau da esan behar dioguna)

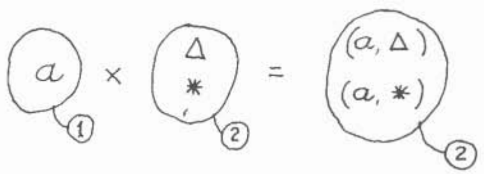
Orduan, biderketak egitea, bikoteak osatzea izango da, eta hau oso erraza eta logikoa da haur batentzat.

1×1 ;



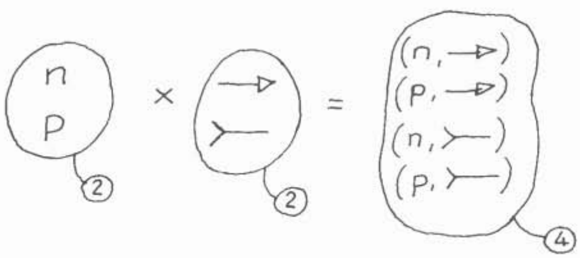
1×1 = 1

1×2 ;



1×2 = 2

2×2 ;



2×2 = 4

Hemen azaldu dugun ideiak, besteak baino ikas arazteko askoz errezagoa dirudi, eta honela da gure iritzitan. Baina ezin da inolaz ere ahaztu, gauza bat dela bide errez bat ematea eta beste bat bide hori azkarra izatea. Ene ustez, bi gauzak beharrezkoak dira eta ezin da onartu sistema bat bere erreztasunagatik bakarrik, bere azkartasuna begiratu gabe.

Hortaz oso egokia izango litzateke, lehen ideia bezala, multzoen hau sartzea; baina hori ikasi ondoren bestea, batuketarena alegia, esplikatu eta landu beharko da.

Hemendik aurrera hori egiteko sistema bat aztertzen saiatuko naiz.

Eman dezagun 4×3 biderketa egin nahi dugula, eta multzoen teoria jarraituz begira nola egingo litzatekeen:

a — Orain arte elementuak edozein izan dira; orain idazteko errazak direnak bakarrik hartuko ditugu.

b — Gero bikoteak eratzekc taularen sistema jarraituko dugu:

○	(a, ○)	(b, ○)	(c, ○)	(d, ○)	4
□	(a, □)	(b, □)	(c, □)	(d, □)	4
△	(a, △)	(b, △)	(c, △)	(d, △)	4
×	a	b	c	d	12

A - 4

A-ko elementuak beti horizontalean.

B-ko elementuak beti bertikalean.

Laukitxoak betetzeko, beti lehenik beheko elementua eta ondoren ezkerreko irudia hartu behar da.

Gero kontatu egiten da fila edo errenkada horizontal bakoitzean zenbat elementu dagoen eta apuntatu egiten da. Hau egin ondoren zenbaki guztiak BATUTZEN dira eta honela aterako dugu biderketaren emaitza.

$4 \times 3 = 4 + 4 + 4 + 4 = 12$

Hau da, beraz, momentoa ikas arazteko nola biderketa batuketa baten bidez egin daiteeen eta nola gainera, zenbakiak handitzen direnean sistema hau erabiltzea bestea baino askoz errazago den.

Honela 8×6 egiteko, taularen sistemak ez du ia baliorik, oso konplikatua baita; orduan hobe da batuketaren sistema erabiltzea.

$$8 \times 6 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48$$

16

24

32

40

48

Hau ondo ikasia dutenean, eta momento hortan bakarrik, sartu beharko dira biderketaren taulak.

Beraz, memorizazio horrek azken pausoa izan behar du soilik; azken pauso hau batzuen ustez ez da oso komenigarri; ene iritzian bai. Oso ondo bait dago, ulertzea garrantzizkoena dela esatea; baina ondo ulertu ondoren beharrezkoa ere da gauza batzuk buruz jakitea, bestela haurren kalkulatzeko ahalmena asko gutxituko baita.

Orduan bide bat bezala honako hau proposatuko genuke:

1. — Bikoteak nola egiten diren ikas arazi.
2. — Multzoen biderketa esplikatu eta elementu gutxikin egin arazi.
3. — Multzoen sistematik batuketarenera nola pasa daitekeen esplikatu.
4. — Batuketaren sistema erabili hamarra baino txikiago diren zenbakiekin.
5. — Biderketaren taulak buruz ikas arazi.
6. — Edozein zenbakirekin biderketak landu.

ZATIKETA

Zatiketak, banaketa baten itxura eduki du beti, orain arte. Beste eragiketak hiru ikuspegitik aztertu ditugu, multzoen aldetik, bektore aldetik eta abar; zatiketaren kasoan ordea, egia esateko, gure lanak askoz montzagoa izan behar du, multzoen arteko zatiketarik ez bait dago eta bektorezkoak, oso zaila izatez gainera, ez digu ezertarako balio maila hortan. (Ohar bezala N-barruan jarraituko dugula esan nahi dut).

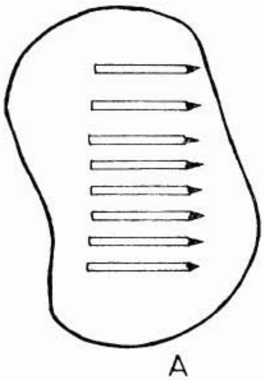
Baldin 8 arkatz eta 4 haur ba ditugu, arkatz horik banatzean, zenbat jasoko du haur bakoitzak? Adibide honen antzeko baten bidez, ematen zaio normalki haurrari zatiketaren ideia; «ba, 2 bakoitzari» erantzungo du haurrak. Orduan, buruz egin duen eragiketa zatiketa deitzen dela esango diogu, eta piska bat aurrerago matematika idazkeran honako era hau erabiltzen dela hori idazteko.

$$8 : 2 = 4 \text{ edo } \frac{8}{2} = 4$$

Zortzi zatitu bi berdin lau.

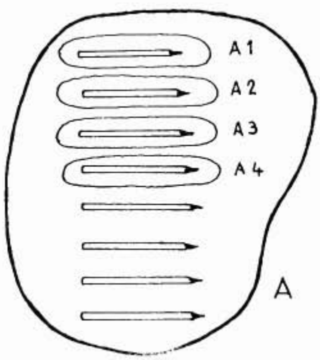
Liburuetan ere honela azaltzen da zatiketa, zeren eta oraingoz ez da beste era bat asmatu.

Halaz eta guztiz hemen bi era azalduko ditugu zatiketa hau errazago egin arazteko; baina hau egiteko banaketaren ideia aurrean eduki behar dugu momentu oro.



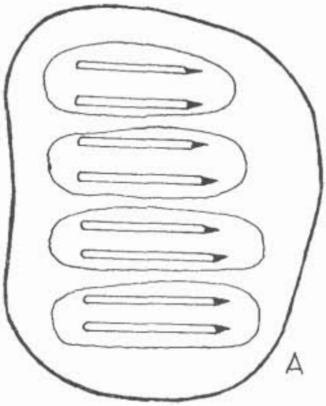
a) A 8 arkatzez osatutako multzo bat izango da; lau mutikoen artean 8 arkatz hauk banatzeko, lau azpimultzo egin behar dugu eta azpimultzo bakoitzean elementu kopuru berdina sartu behar dugu, gainera bat bakarrik sobran utzi gabe.

Eman dezagun azpimultzo bakoitzean arkatz bat sartzen dugula.



Beno, honela lehenengo legea betetzen dugu baina bigarrena ez, lau elementu gelditzen bait dira kanpoan.

Egin dezagun lan berdina, baina 2 arkatz sartuko ditugu azpimultzo bakoitzean.



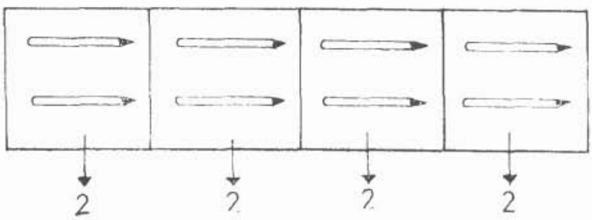
Orain bai, bi legeak bete ditugu; orduan, hemen dugu zatiketaren emaitza; eta bakoitzari, lehendik ba genekienez, bi tokatuko zaizkio.

Azpimultzo bakoitzean hiru elementu sartzen saiatzen bagara, segidan ikusiko dugu nola horretarako ez dugun behar hainbat elementu.

b) Beste sistema beheko taula honen bidez egin daiteke.

Eman dezagun 8 arkatz banatu nahi ditugula 4 haurren artean. Lau lauki egiten dira, eta ordena batetan hasten da: adibidez arkatzak ezkerretatik eskuinetara utziz; eta errenkada bat bukatzen denean berriro hasten da, honela gure arkatzekin bukatu arte.

Azkenean begiratu egin behar da, ea lauki bakoitzean arkatz kopurua berdina den ala ez, eta hala bada hau dugu zatiketaren emaitza.



Saia gaitezen erabili dugun taularen sistemarekin 11 : 5 zatikeeta egiten.

X	X	X	X	X
X	X	X	X	X

Bost lauki egin ditugu, eta 11 elementu banatzen hasiko gara.

Bukatzerakoan, leku guztitan ez dagoela elementu kopuru berdina ikusten da; orduan, bi ematen ba dizkiogu bakoitzari, bat sobran geldituko da, eta ezin diogu inori eman, denak bait dira guretzat berdinak.

Kasu honetan $11 : 5 = 2$ bakoitzari eta 1 hondar moduan.

Begira zazu, kaso honetan ezin daitekeela berdintzaren ikurrik jar. (Ezin bait da banatu 11 elementa 5 eskale artean).

$$\begin{array}{r|l} 11 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array}$$

Hamaika zatitu bost bi eta bat hondar moduan.

Geroari eta erraztasunari begiratuz, biderketak eta zatiketak duten elkarrekiko erlazioa esplikatu behar da, erlazio hau bait da gero zatiketa erraztatzeko jarraitzen den bidea.

$8 : 4 = 2$ Zatiketa moduan

$\dfrac{8}{4} = 2$ Zatiketa moduan

$4 . 2 = 8$ Biderketa moduan

J. M. Goñi